

**DARSTELLUNGEN DER PARA FermIALGEBRA
UND DER
PARACLIFFORDALGEBRA 2. ORDNUNG**

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades
" Doktor der Naturwissenschaft "

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Thomas Zimmerschied
geb. in Wiesbaden

Mainz 1980

1981
—

**DARSTELLUNGEN DER PARA FermIALGEBRA
UND DER
PARACLIFFORDALGEBRA 2. ORDNUNG**

D i s s e r t a t i o n
zur Erlangung des Grades
" Doktor der Naturwissenschaft "

am Fachbereich Mathematik
der Johannes Gutenberg-Universität
in Mainz

Thomas Zimmerschied
geb. in Wiesbaden

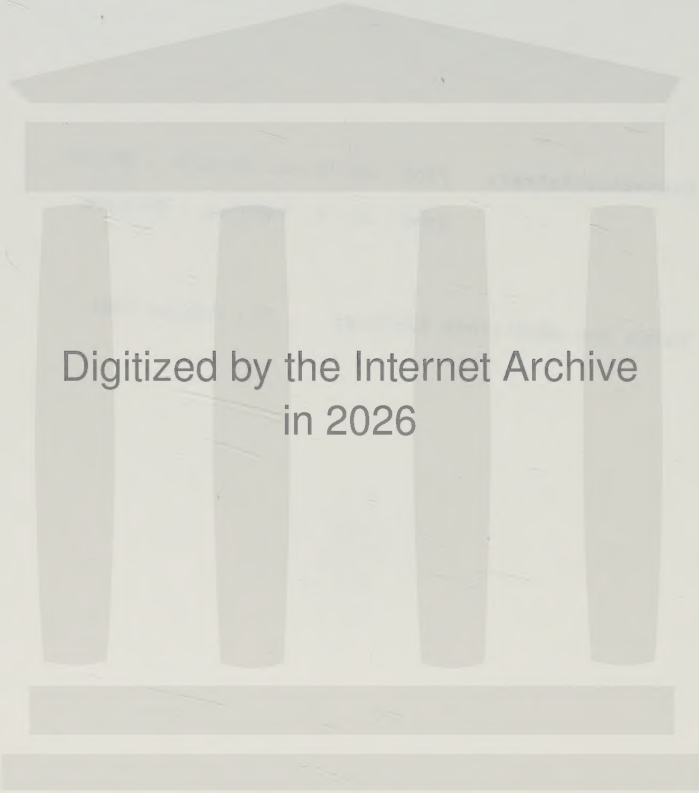
Mainz 1980



Berichterstatter: Prof. Dr. K.-J. Scheiba , Mainz

Prof. Dr. K. Meyberg , München

Datum der mündlichen Prüfung: 21. Januar 1981



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552617_0055

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	I
I Die Fockdarstellung von $PF(E)$	1
II Eigenschaften der Fockdarstellung	9
III Darstellungen von $PF(E)$ bei endlichdimensionalem E	16
IV Irreduzible Darstellungen von $PF(E)$ bei separablem E	21
V Die Paracliffordalgebra 2.Ordnung	28
VI Die Idealstruktur und die irreduziblen Darstellungen von $PC(E)$ für endlichdimensionales E	48
VII Irreduzible Darstellungen von $PC(E)$ für separables E	62
VIII Weitere Darstellungen von $PC(E)$	65
Anhang	75
Literaturverzeichnis	79
Lebenslauf	81

Einleitung

Die Parafermirelationen 2.Ordnung₁)

$$[b_r, b_s, b_t]_+ = 0$$

$$[b_r, b_s, b_t^*]_+ = \delta_{st} b_r$$

$$[b_r, b_s^*, b_t]_+ = \delta_{rs} b_t + \delta_{ts} b_r$$

wurden erstmals 1953 von Green eingeführt (vgl. [Green]). Eine basisfreie Charakterisierung dieser Relationen führt dann zur Parafermialgebra 2. Ordnung $PF(E)_2$. Green hat auch gezeigt, wie man aus Darstellungen der Fermialgebra $F(E)$ Darstellungen von $PF(E)$ gewinnen kann. Diese Darstellungen sind aber reduzibel. Greenberg und Messiah (vgl. [Greenberg/Messiah]) haben dann aus Greens Ansatz durch Einschränkung auf einen Unterraum die irreduzible Fockdarstellung erhalten. Der Nachteil dieser Fockdarstellung von $PF(E)$ besteht darin, daß der Fockraum, d.h. der Zustandsraum des freien Feldes, nicht explizit angegeben wird. In der vorliegenden Arbeit konstruieren wir zu vorgegebenem Einteilchenzustandsraum E den Fockraum $\hat{F}_0(E)$ und realisieren dann die Fockdarstellung von $PF(E)$ über $\hat{F}_0(E)$. Die Fockdarstellung ist irreduzibel und erlaubt in kanonischer Weise die Durchführung der zweiten Quantisierung. Nach einem Theorem von Robbins ([Robbins] Th.6) ist die Fockdarstellung dadurch bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt. Die Fockdarstellung ist aber nur eine unter vielen irreduziblen, paarweise inäquivalenten Darstellungen von $PF(E)$. J. Scheiba hat in seiner Arbeit das Darstellungsproblem von $PF(E)$ für n -dimensionales E vollständig gelöst. Er hat nachgewiesen, daß dann genau $n+1$ paarweise inäquivalente irreduzible Darstellungen existieren. In Kapitel III geben wir eine gegenüber Scheibas Arbeit einfachere Beschreibung dieser $n+1$ Darstellungen. Die Kenntnisse dieser Darstellungen von $PF(E)$ für n -dimensionales E benutzen wir dann in Kap. IV zur Konstruktion abzählbar vieler inäquivalenter irreduzibler Darstellungen von $PF(E)$, falls E von abzählbar unendlicher Dimension ist.

In Kapitel V führen wir die Paracliffordalgebra $PC(E)$ ein. Das Studium der Paracliffordalgebra eröffnet einen neuen Zugang zur Parafermialgebra. In V Theorem 1 weisen wir nämlich die $\ast$ -Isomorphie zwischen $PF(E)$ und $PC(E)$ nach. Dieses Theorem entspricht [Guichardet] Prop. 3.7, wo die Isomorphie von Fermialgebra und Cliffordalgebra in allerdings etwas anderer Formulierung bewiesen wird. Der wesentliche Vorteil dieses Zugangs ist in der "einfacheren Struktur" - $PC(E)$ wird nur durch eine Relation definiert - von $PC(E)$ be-

1) $[a, b, c]_{\ast} = abc + cba$

- 2) E sei ein komplexer Prähilbertraum. $PF(E)$ ist dann die Faktorisierung der freien $\ast$ -Algebra mit 1 über E nach dem zweiseitigen Relationen- $\ast$ -Ideal, welches von den Elementen $[x, y, z]_{\ast}, [x, y, z^*]_{\ast} - (y, z)x, [x, y^*, z]_{\ast} - (x, y)z - (z, y)x$ (für alle $x, y, z \in E$) erzeugt wird.

gründet. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß man $PC(E)$ leicht zu einer (allerdings nur für endlichdimensionales E vollständigen) Hilbertalgebra machen kann. Man erkennt den Vorteil dieses Zugangs zur Parafermialalgebra, wenn man etwa Scheibas Arbeit und Kap. VI oder Kap. IV und Kap. VII vergleicht. Die große Analogie zwischen Cliffordalgebra und Paracliffordalgebra zeigt sich noch in anderen Punkten. So ist der Hilbertraum $\hat{F}_0(E)$ isomorph zu dem nichtkommutativen $L^2(\mathcal{E}, \tau)$, wobei $\mathcal{E}$ eine Operatorenparacliffordalgebra ist (V Th. 2). Die entsprechende Aussage für Fermionen ist die Isomorphie von $\hat{A}E$ und $L^2(\mathcal{C}, \tau)$, wobei $\mathcal{C}$ eine Operatorencliffordalgebra ist ([Gross] Th. 5). Im letzten Kapitel gewinnen wir schließlich aus Darstellungen der Cliffordalgebra ([Shale/Stinespring] Th. 1) die entsprechenden Darstellungen der Paracliffordalgebra und gelangen so wie bei der Fermialgebra zu einer zweiten Realisierung der Fockdarstellung. Zum Schluß möchte ich noch Prof. Scheiba für die Stellung dieses interessanten und reichhaltigen Themas danken.

I Die Fockdarstellung von $PF(E)$

In diesem Kapitel sei E ein separabler Hilbertraum über $\mathbb{C}$.

Bezeichnet j die Einbettung von E in $PF(E)$, so gelten für alle $x, y, z \in E$ die Parafermirelationen 2.Ordnung

$$\begin{aligned} [j(x), j(y), j(z)]_+ &= 0 \\ [j(x), j(y), j(z)^*]_+ &= (y, z)j(x) \\ [j(x), j(y)^*, j(z)]_+ &= (x, y)j(z) + (z, y)j(x) \end{aligned}$$

Unsere Aufgabe besteht nun darin, Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren anzugeben, die diesen Relationen genügen. Wir bestimmen zuerst den Fockraum $\hat{F}_0(E)$ des freien Parafermionenfeldes. Die Konstruktion von $\hat{F}_0(E)$ entspricht vollkommen der Konstruktion von $\hat{A}_E$, dem Fockraum des freien Fermionenfeldes. Wir realisieren $\hat{F}_0(E)$ als Vervollständigung einer Unteralgebra $F_0(E)$ "schiefsymmetrischer" Vektoren von $\otimes E$. Die "Schiefsymmetrie" wird uns von der ersten Parafermirelation vorgegeben, d.h. in $F_0(E)$ soll $[x, y, z]_+ = 0$ für alle $x, y, z \in E$ gelten. Man kann also in $F_0(E)$ zwei benachbarte Faktoren aus E nicht mehr vertauschen. Dies führt dazu, daß wir bei der Definition der Antimetrisierungsprojektion P_n , mit deren Hilfe wir die "schiefsymmetrischen" Tensoren vom Grad n gewinnen, nur eine Untergruppe T_n der Permutationsgruppe S_n berücksichtigen.

Def.: Sei $n \geq 3$. Die von den Transpositionen $(i \ i+2)$, $i \in \{1, \dots, n-2\}$, erzeugte Untergruppe von S_n wird mit T_n bezeichnet.

Lemma 1 T_n hat $c_n := \left[\frac{n+1}{2}\right]! \left[\frac{n}{2}\right]!$ Elemente.

Bew.: Jedes $t \in T_n$ läßt sich faktorisieren zu $t = t_u t_g$, wobei t_u nur ungerade und t_g nur gerade Zahlen permutiert. $\{1, \dots, n\}$ enthält aber genau $\left[\frac{n+1}{2}\right]^g$ ungerade und $\left[\frac{n}{2}\right]^g$ gerade Zahlen. ■

Def.: Jede Permutation $s \in S_n$ induziert mittels $U_s(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) := x_{s(1)} \otimes \dots \otimes x_{s(n)}$ eine unitäre Abbildung $U_s \in L(\hat{\otimes}^n E)$.

Mit Hilfe der unitären Abbildungen U_s definieren wir die Projektionen P_n .

Def.: Sei $n \geq 3$. Wir setzen dann: $P_n := \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t) U_t$.

Für $n=0, 1, 2$ definieren wir: $P_n := I_{\hat{\otimes}^n E}$.

Satz 1 P_n ist Orthogonalprojektion für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Bew.: Man verifiziert die Behauptung durch einfaches Nachrechnen unter Beachtung der Identitäten $U_t^* = U_{t^{-1}}$ und $U_s U_t = U_{ts}$. ■

Die Orthogonalprojektionen P_n , $n \in \mathbb{N}_0$, induzieren in kanonischer Weise eine Orthogonalprojektion P auf $\hat{\otimes} E$, der Hilbertschen Summe der Räume $\hat{\otimes}^n E$.

Def.: $P: \hat{\otimes} E \longrightarrow \hat{\otimes} E$ $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} x_n \longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} P_n x_n$

Nach Einführung der Projektionen $P_n, n \in \mathbb{N}_0$, und P können wir nun $Fo_n(E)$ und $Fo(E)$ definieren.

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Wir setzen dann: $Fo_n(E) := P_n(\otimes^n E)$ und $Fo(E) := P(\otimes E)$.

Bem.: Aus der Definition von P entnimmt man sofort: $Fo(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} Fo_n(E)$.

Die Zerlegung $\otimes E = Fo(E) \oplus \text{Kern}(P|_{\otimes E})$ impliziert die Vektorraumisomorphie von $Fo(E)$ und $\otimes E / \text{Kern}(P|_{\otimes E})$. Wir werden zeigen, daß $\text{Kern}(P|_{\otimes E})$ ein zweiseitiges Ideal in $\otimes E$ ist, so daß $\otimes E / \text{Kern}(P|_{\otimes E})$ und damit auch $Fo(E)$ eine assoziative Algebra mit 1 ist. Die folgende Definition und die Lemmata 2, 3, 4 brauchen wir zum Beweis dieser Aussage (Satz 2).

Def.: Sei $n \geq 3$. Wir definieren dann:

$$N_n(E) := \text{LH} \left\{ x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mid \begin{array}{l} x_i \in E, \text{ mindestens zwei gerade oder} \\ \text{ungerade Indizes sind gleich} \end{array} \right\}$$

Aus der Definition von $N_n(E)$ ersieht man unmittelbar, daß jeder Operator U_t , $t \in T_n, N_n(E)$ invariant läßt.

Lemma 2 Für alle $x \in \otimes E$ und alle $t \in T_n$ gilt: $x - \text{sgn}(t) U_t x \in N_n(E)$.

Bew.: Wegen der Linearität der Operatoren U_t können wir o.E. $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ annehmen. Ist $t = 1$, so ist die Behauptung trivial. Ist

$t = (i \ i+2)$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} x - \text{sgn}(t) U_t x &= x + U_t x \\ &= x_1 \otimes \dots \otimes (x_{i+1} \otimes x_{i+2} + x_{i+2} \otimes x_{i+1}) \otimes \dots \otimes x_n \\ &= x_1 \otimes \dots \otimes (x_i + x_{i+2}) \otimes x_{i+1} \otimes (x_i + x_{i+2}) \otimes \dots \otimes x_n - \\ &\quad x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n - \\ &\quad x_1 \otimes \dots \otimes x_{i+2} \otimes x_{i+1} \otimes x_{i+2} \otimes \dots \otimes x_n \end{aligned}$$

Diese Rechnung zeigt: $(+) \quad x - \text{sgn}(t) U_t x \in N_n(E)$.

Der weitere Beweis erfolgt jetzt durch Induktion nach der Anzahl der Transpositionen vom Typ $(i \ i+2)$, die zur Darstellung von $r \in T_n$ benötigt werden. Sei $r = s \circ t$, wobei t Transposition vom Typ $(i \ i+2)$ und s Produkt $n-1$ solcher Transpositionen ist. Nach Induktionsannahme gilt $x - \text{sgn}(s) U_s x \in N_n(E)$. Die Invarianz von $N_n(E)$ unter U_t impliziert dann: $(++) \quad \text{sgn}(t) U_t x - \text{sgn}(st) U_{st} x \in N_n(E)$. Addition von $(+)$ und $(++)$ liefert dann die Behauptung. ■

Lemma 3 Für alle $t \in T_n$ gilt: $P_n U_t = \text{sgn}(t) P_n$.

Bew.: Man beweist die Behauptung durch einfaches Nachrechnen. ■

Lemma 4 Für $n \geq 3$ gilt: $N_n(E) = \text{Kern}(P_n|_{\otimes^n E})$.

Bew.: Sei $x \in N_n(E)$. Wir können o.E. $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes x_{i+1} \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_n$ wählen.

Für $t = (i \ i+2)$ gilt dann $U_t x = x$. Aus Lemma 3 folgt dann $P_n x = P_n U_t x =$

$\text{sgn}(t)P_n x = -P_n x$. Diese Gleichung impliziert nun $P_n x = 0$ und damit $N_n(E) \subseteq \text{Kern}(P_n | \otimes E)$.

Die umgekehrte Inklusion ist eine einfache Folgerung aus Lemma 2.

Für alle $x \in \otimes^n E$ gilt nämlich:

$$x - P_n x = \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} (x - \text{sgn}(t) U_t x) \in N_n(E) \quad . \quad \blacksquare$$

Satz 2 $\text{Kern}(P | \otimes E)$ ist ein zweiseitiges Ideal in $\otimes E$.

Bew.: Die Behauptung ergibt sich aus Lemma 4 und den folgenden, für alle $p \geq 3$ und $q \in \mathbb{N}_0$ gültigen Relationen:

$$\begin{aligned} N_p(E) \cdot \otimes^q E &\subseteq N_{p+q}(E) \\ \otimes^q E \cdot N_p(E) &\subseteq N_{p+q}(E) \end{aligned} \quad . \quad \blacksquare$$

Da $\text{Kern}(P | \otimes E)$ ein zweiseitiges Ideal ist, ist $E / \text{Kern}(P | \otimes E)$ eine assoziative Algebra mit 1. Bezeichnet φ den Vektorraumisomorphismus von $\text{Fo}(E)$ auf $\otimes E / \text{Kern}(P | \otimes E)$, so wird für alle $u, v \in \text{Fo}(E)$ durch $uv := \varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(v))$ eine Multiplikation in $\text{Fo}(E)$ definiert. Der Ausdruck für uv läßt sich beträchtlich vereinfachen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} uv &= \varphi^{-1}(\varphi(u)\varphi(v)) = \varphi^{-1}((u + \text{Kern}(P | \otimes E))(v + \text{Kern}(P | \otimes E))) \\ &= \varphi^{-1}(uev + \text{Kern}(P | \otimes E)) = P(uev) \end{aligned} \quad .$$

Satz 3 $\text{Fo}(E)$ ist eine Algebra mit 1.

Bew.: Die Behauptung folgt unmittelbar aus obigen Ausführungen. $\blacksquare$

Satz 4 Für alle $x, y, z \in E$ gilt: $[x, y, z]_+ = 0$

Bew.: $[x, y, z]_+ = P(xyez + zeyex) = P((x+z)eye(x+z) - xeyex - zeyez) = 0$
Das letzte Gleichheitszeichen ist richtig, weil $(x+z)eye(x+z) - xeyex - zeyez$ in $N_3(E)$ und damit in $\text{Kern}(P)$ liegt. $\blacksquare$

Bevor wir zur Definition der Erzeugungsoperatoren kommen, wollen wir uns das von $\otimes E$ auf $\text{Fo}(E)$ induzierte Skalarprodukt genauer betrachten und die Dimension von $\text{Fo}(E)$ bei endlichdimensionalem E bestimmen.

Bem.: Für alle $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in E$ gilt:

$$\begin{aligned} (x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_n) &= (P_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n), P_n(y_1 \otimes \dots \otimes y_n)) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, P_n(y_1 \otimes \dots \otimes y_n)) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t) (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, U_t(y_1 \otimes \dots \otimes y_n)) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t) (x_1, y_{t(1)}) \dots (x_n, y_{t(n)}) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t_u) (x_1, y_{t_u(1)}) \dots \text{sgn}(t_g) (x_2, y_{t_g(2)}) \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c_n} \begin{array}{cc} \det((x_i, y_j)) & \det((x_k, y_l)) \\ i, j & k, l \\ \text{ungerade} & \text{gerade} \end{array}$$

$F_0(E)$ ist also ein Prähilbertraum. Seine Vervollständigung wird mit $\widehat{F_0}(E)$ bezeichnet. Man sieht sofort, daß man $\widehat{F_0}(E)$ mit $P(\widehat{\otimes} E)$ identifizieren kann.

Satz 5 Sei $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E . Dann bilden die Vektoren $\{\sqrt{c_n} e_{i_1} \dots e_{i_n} | n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } i_j < i_{j+2}\}$ eine Orthonormalbasis von $\widehat{F_0}(E)$.

Bew.: Wir zeigen zuerst, daß obige Vektoren ein Orthonormalsystem bilden. Nach Konstruktion sind die Räume $F_{0_n}(E)$ und $F_{0_m}(E)$ für $n \neq m$ paarweise orthogonal. Im folgenden sei o.E. $n=m$ und n gerade.

$$(e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_n}) = \frac{1}{c_n} \begin{vmatrix} (e_{i_1}, e_{j_1}) & \dots & (e_{i_1}, e_{j_{n-1}}) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_{i_{n-1}}, e_{j_1}) & \dots & (e_{i_{n-1}}, e_{j_{n-1}}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e_{i_2}, e_{j_2}) & \dots & (e_{i_2}, e_{j_n}) \\ \vdots & & \vdots \\ (e_{i_n}, e_{j_2}) & \dots & (e_{i_n}, e_{j_n}) \end{vmatrix}$$

Ist $i_1 > j_1$, so wird die erste Spalte in der ersten Determinante identisch 0. Ist $i_1 < j_1$, so wird die erste Zeile in der ersten Determinante identisch 0. Wiederholt man diese Schlußweise, so sieht man, daß genau dann $(e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{j_1} \dots e_{j_n}) \neq 0$ ist, wenn $i_k = j_k$ für $k=1, \dots, n$ gilt. Nachdem wir die Orthogonalität gezeigt haben, müssen wir noch die Normiertheit nachrechnen.

$$(\sqrt{c_n} e_{i_1} \dots e_{i_n}, \sqrt{c_n} e_{i_1} \dots e_{i_n}) = c_n (e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_{i_1} \dots e_{i_n})$$

$$= \frac{c_n}{c_n} \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Die Totalität von $\{\sqrt{c_n} e_{i_1} \dots e_{i_n} | n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } i_j < i_{j+2}\}$ folgt aus der Totalität von $\{e_{i_1} \dots e_{i_n} | n \in \mathbb{N}_0\}$ in $\widehat{\otimes} E$ und der Charakterisierung von $\text{Kern}(P)$ in Lemma 4. ■

Für endlichdimensionales E erhalten wir folgendes Korollar.

Korollar 1 Ist $\dim E = n$, so gilt:

a) $F_{0_k}(E) = \{0\}$ für $k \geq 2n+1$

b) $\dim F_{0_k}(E) = \binom{n}{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$ für $k=0, \dots, 2n$

Korollar 1 und das nächste Lemma erlauben uns dann, die Dimension von $F_0(E)$ für n -dimensionales E zu bestimmen.

Lemma 5 Seien $n, N, M \in \mathbb{N}$ und $0 \leq M \leq N$, $n \leq \min\{M, N-M\}$, dann gilt:

$$\sum_{k=0}^n \binom{M}{k} \binom{N-M}{n-k} = \binom{N}{n}$$

Bew.: $(1+x)^N = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} x^j$

$$\begin{aligned}
 (1+x)^N &= (1+x)^M (1+x)^{N-M} = \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} x^k \sum_{l=0}^{N-M} \binom{N-M}{l} x^l \\
 &= \sum_{k=0}^M \sum_{l=0}^{N-M} \binom{M}{k} \binom{N-M}{l} x^{l+k}
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich bei x^n liefert dann die Behauptung. ■

Satz 6 Ist $\dim E = n$, so ist $\dim \text{Fo}(E) = \binom{2n+1}{n}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Bew.: } \dim \text{Fo}(E) &= \sum_{k=0}^{2n} \dim \text{Fo}_k(E) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k-1} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{n-k} \binom{n}{k-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{2n-n}{n-k} + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n-n}{n-1-j} \binom{n}{j} \\
 &= \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \binom{2n+1}{n}
 \end{aligned}$$

Nachdem wir mit dem Fockraum einen Darstellungsraum konstruiert haben, können wir jetzt die darstellenden Operatoren angeben.

Def.: Sei $x \in E$,

$$\begin{aligned}
 C_x: \text{Fo}(E) &\longrightarrow \text{Fo}(E) \\
 \sum_{n \in \mathbb{N}_0} u_n &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\sqrt{\frac{c_{n+1}}{c_n}} x u_n \right)
 \end{aligned}$$

C_x heißt Erzeugungsoperator.

Bem.: Aus der Definition von C_x ersieht man sofort, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$C_x(\text{Fo}_n(E)) \subseteq \text{Fo}_{n+1}(E)$$

Satz 7 C_x ist ein stetiger Operator der Norm $\|x\|$.

Bew.: Der Fall $x=0$ ist trivial; wir können deshalb o.E. $\|x\|=1$ annehmen. Wegen der Orthogonalität der Räume $\text{Fo}_n(E)$, $n \in \mathbb{N}_0$, brauchen wir C_x nur auf $\text{Fo}_n(E)$ oder einem dichten Teilraum U von $\text{Fo}_n(E)$ betrachten. Sei $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E mit $e_1 = x$. Wir definieren dann $U := \text{LH}\{e_{i_1} \dots e_{i_n} | i_j < i_{j+2}\}$. Sei $u \in U$ und o.E. n gerade.

$$u = \sum_{i=1}^r a_i e_{i_1} \dots e_{i_n}$$

$$\begin{aligned}
 \|C_x u\|^2 &= \frac{c_{n+1}}{c_n} \sum_{i=1}^r |a_i|^2 (e_1 e_{i_1} \dots e_{i_n}, e_1 e_{i_1} \dots e_{i_n}) \\
 &= \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^r |a_i|^2 \begin{vmatrix} (e_1, e_1) \dots (e_1, e_{i_n}) \\ (e_{i_1}, e_1) \dots (e_{i_n}, e_{i_n}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (e_{i_1}, e_{i_1}) \dots (e_{i_1}, e_{i_{n-1}}) \\ (e_{i_{n-1}}, e_{i_1}) \dots (e_{i_{n-1}}, e_{i_{n-1}}) \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^r |a_i|^2 \begin{vmatrix} 1 & & (e_1, e_{i_2}) \\ & \ddots & \vdots \\ (e_{i_2}, e_1) & & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^r |a_i|^2 (1 - |(e_1, e_{i_2})|^2) \leq \frac{1}{c_n} \sum_{i=1}^r |a_i|^2 = \|u\|^2$$

Wählt man $i_2 > 1, i=1, \dots, r$, so erhält man sogar $\|C_x u\| = \|u\|$ und damit die Behauptung. ■

Die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von C_x auf $\widehat{Fo}(E)$ wird ebenfalls mit C_x bezeichnet. Der adjungierte Operator C_x^* wird Vernichtungsoperator genannt. Wir beschreiben nun die Wirkung von C_x^* auf homogene Vektoren aus $Fo(E)$.

Satz 8 Seien $v_i \in E, i=1 \dots n$, dann gilt:

a) $C_x^* \Omega = 0$

b) $C_x^* v_1 \dots v_n = \sqrt{\frac{c_{n-1}}{c_n}} ((v_1, x) v_2 \dots v_n - \sum_{i=2}^n (v_{2i-1}, x) v_2 \dots v_{2i-2} v_{2i} \dots v_n)$

Bew.: a) Für alle $u \in Fo(E)$ gilt: $(C_x^* u, \Omega) = 0$

b) Wir beweisen die Behauptung nur für gerades n , d.h. $n=2m$. Sei $u \in E$.
 $u = u_1 \dots u_{2m-1}$ mit $u_i \in E$.

$$(C_x^* u, v) = \sqrt{\frac{c_{2m}}{c_{2m-1}}} (x u_1 \dots u_{2m-1}, v_1 \dots v_{2m})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c_{2m} c_{2m-1}}} \begin{vmatrix} (x, v_1) & \dots & (x, v_{2m-1}) \\ \dots & & \dots \\ (u_{2m-2}, v_1) & \dots & (u_{2m-2}, v_{2m-1}) \end{vmatrix} \overbrace{\begin{vmatrix} (u_1, v_2) & \dots & (u_1, v_{2m}) \\ \dots & & \dots \\ (u_{2m-1}, v_2) & \dots & (u_{2m-1}, v_{2m}) \end{vmatrix}}^R$$

$$= \frac{1}{\sqrt{c_{2m} c_{2m-1}}} \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (x, v_{2i-1}) \begin{vmatrix} (u_2, v_1) & \dots & (u_2, v_{2i-1}) & \dots & (u_2, v_{2m-1}) \\ \dots & & \dots & & \dots \\ (u_{2m-2}, v_1) & \dots & (u_{2m-2}, v_{2i-1}) & \dots & (u_{2m-2}, v_{2m-1}) \end{vmatrix} \cdot R$$

$$= \sqrt{\frac{c_{2m-1}}{c_{2m}}} \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} (x, v_{2i-1}) (u_1 \dots u_{2m-1}, v_2 v_1 \dots v_{2i} v_{2i+1} \dots v_{2m})$$

$$= \sqrt{\frac{c_{2m-1}}{c_{2m}}} ((x, v_1) (u, v_2 \dots v_{2m}) - \sum_{i=2}^m (x, v_{2i-1}) (u, v_2 \dots v_{2i-2} v_{2i} v_{2i+1} \dots v_{2m}))$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt wegen Satz 4.

Für ungerades n beweist man die Behauptung vollkommen analog. ■

Wir sind jetzt in der Lage zu zeigen, daß die Operatoren $C_x, C_x^*, x \in E$, die Parafermirelationen 2.Ordnung erfüllen. Das Tripel $(E, C, L(\widehat{Fo}(E)))$ bezeichnet man dann als ein Parafermisystem 2.Ordnung.

Def.: Sei E ein komplexer Hilbertraum und A eine komplexe $\ast$ -Algebra. Existiert ferner eine Abbildung $p \in L(E; A)$, die die Parafermirelationen 2. Ordnung erfüllt, so heißt das Tripel (E, p, A) Parafermisystem 2. Ordnung.

Bem.: Ist (E, p, A) ein Parafermisystem, so existiert aufgrund der universellen Eigenschaft der Parafermialgebra genau ein $\ast$ -Algebrenhomomorphismus p' , der folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & PF(E) \\ p \searrow & & \swarrow p' \\ & A & \end{array}$$

Ist A eine Unter- $\ast$ -algebra von $L(H)$, H Hilbertraum, so ist p' eine $\ast$ -Darstellung von $PF(E)$ über H .

Theorem 1 $(E, C, L(\hat{F}_0(E)))$ ist ein Parafermisystem 2. Ordnung.

Bew.: Wir müssen nur zeigen, daß die Parafermirelationen erfüllt sind.

$$(1) \quad [C_x, C_y, C_z]_+ = 0$$

Diese Relation ist wegen Satz 4 offensichtlich erfüllt.

$$(2) \quad [C_x, C_y, C_z^*]_+ = (y, z) C_x$$

Wir wählen o.E. $v = v_1 \dots v_n \in F_0(E)$ mit $(v_j, z) = 0$ für $j \geq 3$.

$$\begin{aligned} C_x C_y C_z^* v &= C_x C_y \left(\sqrt{\frac{c_n - 1}{c_n}} (v_1, z) v_2 \dots v_n \right) \\ &= \sqrt{\frac{c_n + 1}{c_n}} (v_1, z) x y v_2 \dots v_n \\ C_z^* C_y C_x v &= C_z \left(\sqrt{\frac{c_n + 2}{c_n}} y x v_1 \dots v_n \right) \\ &= \sqrt{\frac{c_n + 1}{c_n}} ((y, z) x v_1 \dots v_n - (v_1, z) x y v_2 \dots v_n) \end{aligned}$$

Diese Rechnungen beweisen (2).

$$(3) \quad [C_x, C_y^*, C_z]_+ = (x, y) C_z + (z, y) C_x$$

Wir wählen o.E. $u = u_1 \dots u_m \in F_0(E)$ mit $(u_j, y) = 0$ für $j \geq 3$.

$$\begin{aligned} C_x C_y^* C_z v &= \sqrt{\frac{c_m + 1}{c_m}} C_x C_y^* z u_1 \dots u_m = C_x ((z, y) u - (u_2, y) u_1 z u_3 \dots u_m) \\ &= (z, y) C_x u - \sqrt{\frac{c_m + 1}{c_m}} (u_2, y) x u_1 z u_3 \dots u_m \\ C_z C_y^* C_x v &= (x, y) C_z u - \sqrt{\frac{c_m + 1}{c_m}} (u_2, y) z u_1 x u_3 \dots u_m \\ &= (x, y) C_z u + \sqrt{\frac{c_m + 1}{c_m}} (u_2, y) x u_1 z u_3 \dots u_m \end{aligned}$$

$$[C_x, C_y^*, C_z]_+ v = ((x, y)C_z + (z, y)C_x)v$$

Bem.: Gemäß der vorhergehenden Bemerkung induziert C dann die Fockdarstellung C' von $PF(E)$ über $\hat{F}o(E)$. Wir werden in Zukunft jedoch die Fockdarstellung, d.h. den $*$ -Algebrenhomomorphismus, ebenfalls mit C bezeichnen.

II Eigenschaften der Fockdarstellung

In diesem Kapitel werden wir einige Eigenschaften der Fockdarstellung nachweisen, um dann mit Hilfe eines Theorems von S. Robbins deren Eindeutigkeit bis auf unitäre Äquivalenz zu zeigen. Zuerst beweisen wir die Irreduzibilität der Fockdarstellung; dazu benutzen wir, wie auch später noch oft, folgendes Lemma.

Lemma 1 (Verallgemeinertes Lemma von Haag/Schroer)

Sei A eine $\ast$ -Algebra und U eine $\ast$ -Darstellung von A über dem Hilbertraum H . Besitzt die Darstellung einen zyklischen Vektor z und enthält $\overline{U(A)}^{\text{stark}}$ die Orthogonalprojektion P_z auf $\langle z \rangle$, so ist die Darstellung U (topologisch) irreduzibel.

Bew.: Wir können o.E. $\|z\|=1$ annehmen. Es gilt dann $P_z = (\cdot, z)z$.

Aufgrund der Zyklizität von z gibt es für jedes $h \neq 0, h \in H$, ein $a_h \in A$, so daß gilt: $(U(a_h)h, z) = 1$.

Sei jetzt $N \neq \{0\}$ ein invarianter, abgeschlossener Unterraum. Wir wählen ein $h \in N, h \neq 0$. Wenden wir P_z auf $U(a_h)h$ an, so erhalten wir

$$P_z U(a_h)h = (U(a_h)h, z)z = z.$$

Da N unter $U(A)$ invariant ist, ist N wegen seiner Abgeschlossenheit auch unter $\overline{U(A)}^{\text{stark}}$ invariant, und folglich ist $z \in N$. Aus der Zyklizität von z und der Abgeschlossenheit von N folgt dann $N = H$, d.h. aber, daß die Darstellung U irreduzibel ist. ■

Satz 1 Die Fockdarstellung C von $PF(E)$ über $\hat{F}_0(E)$ ist irreduzibel.

Bew.: Ω ist offensichtlich ein zyklischer Vektor der Darstellung C . Wegen obigem Lemma müssen wir nur noch $P_\Omega \in \overline{C(PF(E))}^{\text{stark}}$ zeigen. Sei $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E . Nach I Satz 5 ist dann $M := \{e_{i_1} \dots e_{i_n} | n \in \mathbb{N}_0, 1 \leq i_j \leq 2\}$ eine Orthonormalbasis von $\hat{F}_0(E)$. Für alle $u \in LH(M)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{i=1}^n C_{e_i}^{\ast 2} C_{e_i}^2 \right) u = (u, \Omega) \Omega = P_\Omega u.$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Norm der Operatoren $\prod_{i=1}^n C_{e_i}^{\ast 2} C_{e_i}^2$ 1 ist, gilt

obige Konvergenz sogar für alle $u \in \hat{F}_0(E)$. ■

Da die Fockdarstellung schon durch die $C_x, x \in E$, bestimmt ist, werden wir im folgenden betrachten:

Def.: Seien H und K komplexe Hilberträume und $C: H \rightarrow L(K)$ eine lineare Abbildung. (H, C, K) heißt dann beschränkte Quantenstruktur über H . Eine beschränkte Quantenstruktur (H, C, K) heißt irreduzibel, wenn $P=0$ und $P=I$ die einzigen Projektionen aus $L(K)$ sind, die mit allen $C_x, x \in E$, vertauschen.

Der nächste Satz ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 1.

Satz 2 $(E, C, \hat{F}_0(E))$ ist eine beschränkte, irreduzible Quantenstruktur.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit von $(E, C, \hat{F}_0(E))$ benötigen wir weitere Eigenschaften dieser Quantenstruktur, nämlich Invarianz und Positivität.

Def.: Sei (H, C, K) eine Quantenstruktur über H . Existiert ferner eine stark stetige unitäre Darstellung G der unitären Gruppe auf H durch Operatoren auf K und ein $v \in K$, so daß für alle $U \in \mathcal{U}(H)$, $z \in H$

$$G(U)C(z)G(U)^{-1} = C(Uz)$$

$$G(U)v = v \quad \text{gilt,}$$

so heißt (H, C, K, G, v) invariante Quantenstruktur.

Bem.: Invariante Quantenstrukturen erlauben in kanonischer Weise die Durchführung der 2. Quantisierung, wenn man H als Einteilchenzustandsraum und K als Zustandsraum des freien Feldes auffaßt. Ist nämlich A ein selbstadjungierter Operator in H , so ist $(\exp(itA))_t$ eine stark stetige unitäre Gruppe auf H . Wegen der starken Stetigkeit von G ist dann $(G(\exp(itA)))_t$ eine stark stetige unitäre Gruppe auf K . Nach dem Satz von Stone gibt es folglich einen eindeutig bestimmten selbstadjungierten Operator $dG(A)$ in K , so daß für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\exp(itdG(A)) = G(\exp(itA)) \quad \text{gilt.}$$

Den Vektor v bezeichnet man auch als Vakuum, denn für jeden selbstadjungierten Operator A in H gilt $dG(A)v = 0$.

Will man erreichen, daß für jeden positiven Operator A in H $dG(A)$ ebenfalls positiv sein soll, so muß man dies extra fordern.

Def.: Eine invariante Quantenstruktur (H, C, K, G, v) heißt positiv, wenn die Positivität von A diejenige von $dG(A)$ impliziert.

Wir kommen nun zur Definition der Darstellung Γ der unitären Gruppe auf E . Wir definieren Γ als Abbildung von $\mathcal{U}(E)$ nach $\mathcal{U}(\hat{\otimes} E)$ und zeigen dann, daß für alle $U \in \mathcal{U}(E)$ $\hat{F}_0(E)$ reduzierender Teilraum für $\Gamma(U)$ ist, so daß wir mit der Einschränkung auf $\hat{F}_0(E)$ die gewünschte Darstellung erhalten.

Def.: Sei $U \in \mathcal{U}(E)$. Wir definieren dann:

$$\Gamma_0(U) := I_{\mathbb{C}}$$

$$\Gamma_n(U) : \hat{\otimes}^n E \longrightarrow \hat{\otimes}^n E$$

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_n \longmapsto Ux_1 \otimes \dots \otimes Ux_n$$

und stetige, lineare Fortsetzung

$$\Gamma(U) : \hat{\otimes} E \longrightarrow \hat{\otimes} E$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \longmapsto \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(U) x_n$$

Lemma 2 Für alle $U \in \mathcal{U}(E)$ ist $\hat{F}_0(E)$ ein reduzierender Teilraum für $\Gamma(U)$.

Bew.: Wir müssen nur zeigen, daß für alle $n \in \mathbb{N}_0$ P_n mit $\Gamma_n(U)$ vertauscht. Für $n=0,1,2$ ist die Behauptung wegen $P_n = I$ trivialerweise richtig. Sei also $n \geq 3$.

$$\begin{aligned} P_n \Gamma_n(U)(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) &= P_n(Ux_1 \otimes \dots \otimes Ux_n) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t) U_t(Ux_1 \otimes \dots \otimes Ux_n) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t) (Ux_{t(1)} \otimes \dots \otimes Ux_{t(n)}) \\ &= \frac{1}{c_n} \sum_{t \in T_n} \text{sgn}(t) \Gamma_n(U)(x_{t(1)} \otimes \dots \otimes x_{t(n)}) \\ &= \Gamma_n(U) P_n(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \end{aligned}$$

Folglich vertauscht P_n mit $\Gamma_n(U)$. ■

Def.: Sei $U \in \mathcal{U}(E)$. $G(U) := \Gamma(U) \Big|_{\hat{F}_0(E)}$ $G_n(U) := \Gamma_n(U) \Big|_{\hat{F}_{0n}(E)}$

Satz 3 $(E, \mathbb{C}, \hat{F}_0(E), G, \Omega)$ ist eine invariante Quantenstruktur.

Bew.: Die starke Stetigkeit von G ist eine Folge der starken Stetigkeit von Γ . Diese wiederum beruht auf der starken Stetigkeit der Γ_n , was eine unmittelbare Konsequenz der Stetigkeit der Multiplikation homogener Tensoren ist. Die Darstellungseigenschaften von Γ und damit auch von G sind unmittelbar einsichtig.

$$G(U)\Omega = I_{\mathbb{C}}\Omega = \Omega$$

$$\begin{aligned} G(U)C_z G(U)^{-1} x_1 \dots x_n &= G(U)C_z G(U^{-1}) x_1 \dots x_n \\ &= G(U) \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} z U^{-1} x_1 \dots U^{-1} x_n \right) \\ &= \left[\frac{c_{n+1}}{c_n} \right] U z x_1 \dots x_n \\ &= C_{Uz} x_1 \dots x_n \end{aligned}$$
■

Zum Nachweis der Positivität von $(E, \mathbb{C}, \hat{F}_0(E), G, \Omega)$ benötigen wir folgendes Lemma über das Tensorprodukt selbstadjungierter Operatoren.

Lemma 4 Sei A ein selbstadjungierter Operator mit Definitionsbereich D im Hilbertraum H .

$$A_n : \hat{\otimes}^n H \supset \otimes^n D \longrightarrow \hat{\otimes}^n H$$

$$A_n := A \otimes I \otimes \dots \otimes I + I \otimes A \otimes I \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes I \otimes A$$

A_n ist wesentlich selbstadjungiert und $\sigma(\overline{A_n}) = \{ \lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n \mid \lambda_i \in \sigma(A) \}$

Bew.: [Reed/Simon], Hd. 1, Theorem VIII.33 ■

Lemma 4 Sei A ein selbstadjungierter Operator in E mit Definitionsbereich D . Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann: $\overline{A_n} = d\Gamma_n(A) := d\Gamma(A)|_{\otimes^n E}$.

Bew.: Da $d\Gamma_n(A)$ selbstadjungiert ist, reicht es zu zeigen:

$$A_n \subseteq d\Gamma_n(A)$$

Sei $x \in \otimes^n D$. Wegen der Linearität von A_n und $d\Gamma_n(A)$ können wir o.E. $x = x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ wählen.

$$\begin{aligned} (\exp(itA))x - x &= (\exp(itA)x_1 - x_1) \otimes \exp(itA)x_2 \otimes \dots \otimes \exp(itA)x_n \\ &\quad + x_1 \otimes (\exp(itA)x_2 - x_2) \otimes \exp(itA)x_3 \otimes \dots \otimes \exp(itA)x_n \\ &\quad + \dots \dots \dots \\ &\quad + x_1 \otimes \dots \otimes x_{n-1} \otimes (\exp(itA)x_n - x_n) \end{aligned}$$

Dividiert man diese Gleichung durch it und läßt dann $t \rightarrow 0$ gehen, so konvergiert die rechte Seite gegen $A_n x$. Also ist $x \in D(d\Gamma_n(A))$ und $d\Gamma_n(A)x = A_n x$. Dies bedeutet aber gerade $A_n \subseteq d\Gamma_n(A)$. ■

Lemma 3 und Lemma 4 gestatten uns jetzt einen einfachen Beweis der Positivität von $(E, C, \widehat{F}_0(E), G, \mathcal{Q})$.

Satz 4 $(E, C, \widehat{F}_0(E), G, \mathcal{Q})$ ist eine positive, invariante Quantenstruktur.

Bew.: Sei A ein positiver Operator in E . Nach Konstruktion von Γ ist $d\Gamma(A)$ genau dann positiv, wenn $d\Gamma_n(A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ positiv ist. Da $\widehat{F}_0(E)$ ein reduzierender Teilraum für $\Gamma_n(\exp(itA))$ und somit auch für $d\Gamma_n(A)$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(d\Gamma_n(A)) &= \mathcal{G}(d\Gamma_n(A)|_{\text{Bild}(P_n)}) \cup \mathcal{G}(d\Gamma_n(A)|_{\text{Kern}(P_n)}) \\ &= \mathcal{G}(dG_n(A)) \cup \mathcal{G}(d\Gamma_n(A)|_{\text{Kern}(P_n)}) \end{aligned}$$

Es folgt $\mathcal{G}(dG_n(A)) \subseteq \mathcal{G}(d\Gamma_n(A)) = \mathcal{G}(\overline{A_n}) \subseteq [0, \infty)$, so daß

$dG_n(A)$ positiv ist. ■

Als letzte Voraussetzung des Theorems von Robbins müssen wir noch verifizieren, daß bestimmte Operatoren Teilchenzahloperatoren sind.

Def.: Sei (H, C, K) eine beschränkte Quantenstruktur. Ein selbstadjungierter Operator $n(x) \in L(K)$, $x \in H$ und $\|x\| = 1$, heißt Teilchenzahloperator (Besetzungszahloperator), wenn für alle $y \in H$ gilt:

$$[n(x), C(y)] = (y, x)C(x)$$

Satz 5 Für alle $x \in E$, $\|x\| = 1$, ist $n(x) := C_x C_x^* - C_x^* C_x$ Teilchenzahloperator.

$$\begin{aligned}
 \text{Bew.: } [n(x), C_y] &= n(x)C_y - C_y n(x) = C_x C_x^* C_y - C_x^* C_x C_y - C_y C_x C_x^* + C_y C_x^* C_x \\
 &= [C_x, C_x^*, C_y]_+ - [C_y, C_x, C_x^*]_+ \\
 &= C_y + (y, x)C_x - C_y = (y, x)C_x
 \end{aligned}$$

Wir kommen nun zu dem bereits mehrfach erwähnten Theorem von Robbins.

Theorem ([Robbins], Theorem 6)

Sei (H, C, K, G, v) eine beschränkte, irreduzible, invariante, positive Quantenstruktur über H , so daß für jeden Einheitsvektor $z \in H$ $n(z) := \frac{1}{2}(C(z)C(z)^* - C(z)^*C(z))$ ein Teilchenzahloperator ist. Dann ist (H, C, K, G, v) unitär äquivalent zur freien Parafermionenquantenstruktur p -ter Ordnung mit $p = \|C(x)v\|^2$ für beliebigen Einheitsvektor x .

Bem.: Robbins geht von den Relationen

$$[[C(x)^*, C(z)], C(y)] = -2(y, x)C(z)$$

$$\text{und} \quad [[C(x), C(z)], C(y)] = 0$$

aus, so daß sich seine $C(x)$ von den hier verwendeten C_x um den Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden; es gilt: $C(x) = \sqrt{2}C_x$. Die Relationen aus dem Robbinsschen Theorem gehen dann über in:

$$n(z) = C_z C_z^* - C_z^* C_z$$

$$\text{und} \quad p = 2\|C_x v\|^2$$

Aus dem Robbinsschen Theorem und den Sätzen 2-4 folgt unmittelbar:

Theorem 1 $(E, C, \widehat{Fo}(E), G, \Omega)$ ist unitär äquivalent zur freien, invarianten Parafermionenquantenstruktur 2. Ordnung.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch eine einfache Beschreibung eines einzelnen Operators geben, der die Parafermirelationen 2. Ordnung erfüllt.

Theorem 2 Sei C ein abgeschlossener, dicht definierter Operator im Hilbertraum H , der folgenden Relationen genügt:

$$(1) \quad C^3 = 0$$

$$(2) \quad C^2 C^* + C^* C^2 = C$$

$$(3) \quad CC^* C = C$$

Der Operator C ist dann beschränkt und wird von 3-dimensionalen Räumen $H_i, i \in I$, reduziert.

$$C_1 := C|_{H_1} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C verschwindet auf $(\bigoplus_{i \in I} H_1)^{\perp}$, so daß man C bezüglich einer geeigneten Basis als direkte Summe von Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Nullmatrix schreiben kann.

Bew.: C^*C ist ein selbstadjungierter Operator.

Die Relation (3) impliziert $(C^*C)(C^*C) = C^*C$. Für jedes $x \in D(C^*C)$ gilt nun $\|C^*Cx\|^2 = (C^*Cx, C^*Cx) = (C^*Cx, x) \leq \|C^*Cx\| \|x\|$. Aus dieser Ungleichung erhält man sofort $\|C^*Cx\| \leq \|x\|$. Wir können jetzt $\|Cx\|$ abschätzen:

$$\|Cx\|^2 = (Cx, Cx) = (C^*Cx, x) \leq \|x\|^2.$$

Da $D(C^*C)$ dicht in H liegt und C abgeschlossen ist, folgt sofort $C \in L(H)$.

Wir definieren jetzt Operatoren $P_i, i=0,1,2$, und zeigen dann, daß es sich um paarweise orthogonale Projektionen handelt.

$$P_0 := C^{*2}C^2 \quad P_1 := C^*C^2C^* \quad P_2 := C^2C^{*2}$$

$$\begin{aligned} P_0^2 &= C^{*2}C^2C^{*2}C^2 = C^{*2}(C^2C^*)(C^*C^2) = C^{*2}(C-C^*C^2)(C-C^2C^*) \\ &= C^{*2}C^2 = P_0 \end{aligned}$$

$$P_0^* = P_0$$

$$P_1^2 = C^*(C^2C^*)(C^*C^2)C^* = C^*(C-C^*C^2)(C-C^2C^*)C^* = C^*C^2C^* = P_1$$

$$P_1^* = CC^{*2}C = (C^*C^{*2}C)C = C^*C-C^*(C-C^2C^*) = C^*C^2C^* = P_1$$

$$P_2^2 = (C^2C^{*2}C^2)C^{*2} = C^2C^{*2} = P_2$$

$$P_2^* = P_2$$

$$P_0P_1 = C^2(C^2C)C^{*2}C = 0 \quad P_0P_2 = C^{*2}(C^2C^2)C^{*2} = 0$$

$$P_1P_2 = CC^{*2}(CC^2)C^{*2} = 0$$

Die Projektionen P_i sind überdies äquivalent, was wir durch Angabe der jeweiligen partiellen Isometrien verifizieren.

$$(C^*C^2)^*(C^*C^2) = C^{*2}C^*C^2 = C^{*2}C^2 = P_0$$

$$(C^*C^2)(C^*C^2)^* = C^*C^2C^{*2}C = C^*C^2(C^*-CC^{*2}) = C^*C^2C^* = P_1$$

C^*C^2 ist also eine partielle Isometrie mit Anfangsbereich

$$H^0 := \text{Bild}(P_0) \text{ und Endbereich } H^1 := \text{Bild}(P_1).$$

Vollkommen analog zeigt man, daß C^2C^* eine partielle Isometrie mit Anfangsbereich H^1 und Endbereich $H^2 := \text{Bild}(P_2)$ ist.

Sei jetzt $\{x_i | i \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H^0 .

$$\begin{aligned}
\text{Bew.:} \quad [n(x), C_y] &= n(x)C_y - C_y n(x) = C_x C_x^* C_y - C_x^* C_x C_y - C_y C_x C_x^* + C_y C_x^* C_x \\
&= [C_x, C_x^* C_y]_+ - [C_y, C_x C_x^*]_+ \\
&= C_y + (y, x) C_x - C_y = (y, x) C_x
\end{aligned}$$

Wir kommen nun zu dem bereits mehrfach erwähnten Theorem von Robbins.

Theorem ([Robbins], Theorem 6)

Sei (H, C, K, G, v) eine beschränkte, irreduzible, invariante, positive Quantenstruktur über H , so daß für jeden Einheitsvektor $z \in H$ $n(z) := \frac{1}{2}(C(z)C(z)^* - C(z)^*C(z))$ ein Teilchenzahloperator ist. Dann ist (H, C, K, G, v) unitär äquivalent zur freien Parafermionenquantenstruktur p -ter Ordnung mit $p = \|C(x)v\|^2$ für beliebigen Einheitsvektor x .

Bem.: Robbins geht von den Relationen

$$[[C(x)^*, C(z)], C(y)] = -2(y, x)C(z)$$

$$\text{und} \quad [[C(x), C(z)], C(y)] = 0$$

aus, so daß sich seine $C(x)$ von den hier verwendeten C_x um den Faktor $\sqrt{2}$ unterscheiden; es gilt: $C(x) = \sqrt{2} C_x$. Die Relationen aus dem Robbinsschen Theorem gehen dann über in:

$$n(z) = C_z C_z^* - C_z^* C_z$$

$$\text{und} \quad p = 2 \|C_x v\|^2$$

Aus dem Robbinsschen Theorem und den Sätzen 2-4 folgt unmittelbar:

Theorem 1 $(E, C, \widehat{Fo}(E), G, \Omega)$ ist unitär äquivalent zur freien, invarianten Parafermionenquantenstruktur 2. Ordnung.

Zum Abschluß dieses Kapitels wollen wir noch eine einfache Beschreibung eines einzelnen Operators geben, der die Parafermirelationen 2. Ordnung erfüllt.

Theorem 2 Sei C ein abgeschlossener, dicht definierter Operator im Hilbertraum H , der folgenden Relationen genügt:

$$(1) \quad C^3 = 0$$

$$(2) \quad C^2 C^* + C^* C^2 = C$$

$$(3) \quad C C^* C = C$$

Der Operator C ist dann beschränkt und wird von 3-dimensionalen Räumen $H_i, i \in I$, reduziert.

$$C_1 := C|_{H_1} \cong \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

C verschwindet auf $(\bigoplus_{i \in I} H_1)^{\perp}$, so daß man C bezüglich einer geeigneten Basis

als direkte Summe von Matrizen $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und der Nullmatrix schreiben kann.

Bew.: C^*C ist ein selbstadjungierter Operator.

Die Relation (3) impliziert $(C^*C)(C^*C) = C^*C$. Für jedes $x \in D(C^*C)$ gilt nun $\|C^*Cx\|^2 = (C^*Cx, C^*Cx) = (C^*Cx, x) \leq \|C^*Cx\| \|x\|$. Aus dieser Ungleichung erhält man sofort $\|C^*Cx\| \leq \|x\|$. Wir können jetzt $\|Cx\|$ abschätzen:

$$\|Cx\|^2 = (Cx, Cx) = (C^*Cx, x) \leq \|x\|^2.$$

Da $D(C^*C)$ dicht in H liegt und C abgeschlossen ist, folgt sofort $C \in L(H)$.

Wir definieren jetzt Operatoren $P_i, i=0,1,2$, und zeigen dann, daß es sich um paarweise orthogonale Projektionen handelt.

$$P_0 := C^{*2}C^2 \quad P_1 := C^*C^2C^* \quad P_2 := C^2C^{*2}$$

$$\begin{aligned} P_0^2 &= C^{*2}C^2C^{*2}C^2 = C^{*2}(C^2C^*)(C^*C^2) = C^{*2}(C-C^*C^2)(C-C^2C^*) \\ &= C^{*2}C^2 = P_0 \end{aligned}$$

$$P_0^* = P_0$$

$$P_1^2 = C^*(C^2C^*)(C^*C^2)C^* = C^*(C-C^*C^2)(C-C^2C^*)C^* = C^*C^2C^* = P_1$$

$$P_1^* = CC^{*2}C = (C^*-C^{*2}C)C = C^*C-C^*(C-C^2C^*) = C^*C^2C^* = P_1$$

$$P_2^2 = (C^2C^{*2}C^2)C^{*2} = C^2C^{*2} = P_2$$

$$P_2^* = P_2$$

$$P_0P_1 = C^2(C^2C)C^{*2}C = 0 \quad P_0P_2 = C^{*2}(C^2C^2)C^{*2} = 0$$

$$P_1P_2 = CC^{*2}(CC^2)C^{*2} = 0$$

Die Projektionen P_i sind überdies äquivalent, was wir durch Angabe der jeweiligen partiellen Isometrien verifizieren.

$$(C^*C^2)^*(C^*C^2) = C^{*2}CC^*C^2 = C^{*2}C^2 = P_0$$

$$(C^*C^2)(C^*C^2)^* = C^*C^2C^{*2}C = C^*C^2(C^*-CC^{*2}) = C^*C^2C^* = P_1$$

C^*C^2 ist also eine partielle Isometrie mit Anfangsbereich

$$H^0 := \text{Bild}(P_0) \text{ und Endbereich } H^1 := \text{Bild}(P_1).$$

Vollkommen analog zeigt man, daß C^2C^* eine partielle Isometrie mit Anfangsbereich H^1 und Endbereich $H^2 := \text{Bild}(P_2)$ ist.

Sei jetzt $\{x_i | i \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H^0 .

Da C^*C^2 und C auf $\text{Bild}(C^{*2}C^2)$ übereinstimmen, ist $\{Cx_i | i \in I\}$ Orthonormalbasis von H^1 . Die Gleichung $C^2C^{*2}C^2 = C^2$ impliziert, daß $\{C^2x_i | i \in I\}$ eine Orthonormalbasis von H^2 ist.

Es ist jetzt klar, wie man die Räume $H_i, i \in I$, definiert.

$$H_i := \text{LH}(x_i, Cx_i, C^2x_i)$$

Man sieht sofort, daß H_i unter C invariant ist. Die Invarianz von H_i unter C^* ergibt sich aus nachfolgenden Relationen, so daß insgesamt H_i reduzierender Teilraum für C ist.

$$C^*(C^{*2}C^2) = 0$$

$$C^*C(C^{*2}C^2) = C^{*2}C^2$$

$$C^*C^2(C^{*2}C^2) = C(C^{*2}C^2)$$

Bezüglich der oben eingeführten Basis von H_i gilt dann:

$$C_i \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_i^* \approx \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Als letztes müssen wir noch nachweisen, daß C auf $(\oplus H_i)^\perp$ verschwindet. Da $I - P_0 - P_1 - P_2$ die Orthogonalprojektion auf $(\oplus H_i)^\perp$ ist, müssen wir nur $C(I - P_0 - P_1 - P_2) = 0$ zeigen.

$$\begin{aligned} C(I - P_0 - P_1 - P_2) &= C(I - C^{*2}C^2 - C^*C^2C^* - C^2C^{*2}) = C - CC^{*2}C^2 - CC^*C^2C^* \\ &= C - (C^* - C^{*2}C)C^2 - C^2C^* = C - C^*C^2 - C^2C^* = C^2C^* - C^2C^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

III Darstellungen von $PF(E)$ bei endlichdimensionalem E

J. Scheiba hat in seiner Arbeit "Die Parafermialgebra 2.Ordnung" (s. Anhang) gezeigt, daß es bei n -dimensionalem E genau $n+1$ inäquivalente irreduzible Darstellungen von $PF(E)$ gibt. Die bei diesen Darstellungen auftretenden Operatoren sind nicht sehr bequem zu handhaben. Wir zeigen, wie man mit Hilfe von Greens Ansatz zu äquivalenten, aber einfacher zu beschreibenden Darstellungen gelangt. Zum Schluß dieses Kapitels bestimmen wir noch die Dimension von $PF(E)$ und beweisen damit, daß Greens Ansatz eine treue Darstellung von $PF(E)$ liefert.

In diesem Kapitel bezeichne E einen komplexen, n -dimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_i | i=1 \dots n\}$.

Def.: (Greens Ansatz) Sei $x \in E$ und $C(x)$ bezeichne den Erzeugungsoperator für Fermionen ($C(x) \in L(\Lambda E)$ und $C(x)u_1 \wedge \dots \wedge u_j = \sqrt{j+1} x \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_j$). Wir definieren dann:

$$f(x): \Lambda E \otimes \Lambda E \longrightarrow \Lambda E \otimes \Lambda E$$

$$f(x) := \sqrt{2} (I \otimes C(x) + C(x) \otimes I)$$

Satz 1 $(E, f, L(\Lambda E \otimes \Lambda E))$ ist ein Parafermisystem 2.Ordnung.

Bew.: Der Nachweis der Parafermirelationen erfolgt durch einfaches Nachrechnen unter Benutzung der Vertauschungsrelationen für die $C(x)$.

$$[C(x), C(y)]_+ = 0 \quad \text{und} \quad [C(x), C(y)^*]_+ = (x, y)I$$

$$\begin{aligned} f(x)f(y)f(z) &= \frac{\sqrt{2}}{4} (I \otimes C(x) + C(x) \otimes I) (I \otimes C(y) + C(y) \otimes I) (I \otimes C(z) + C(z) \otimes I) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (I \otimes C(x)C(y)C(z) + C(z) \otimes C(x)C(y) + C(y) \otimes C(x)C(z) + \\ &\quad C(y)C(z) \otimes C(x) + C(x) \otimes C(y)C(z) + C(x)C(z) \otimes C(y) + \\ &\quad C(x)C(y) \otimes C(z) + C(x)C(y)C(z) \otimes I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(z)f(y)f(x) &= \frac{\sqrt{2}}{4} (I \otimes C(z)C(y)C(x) + C(x) \otimes C(z)C(y) + C(y) \otimes C(z)C(x) + \\ &\quad C(y)C(x) \otimes C(z) + C(z) \otimes C(x)C(y) + C(z)C(x) \otimes C(y) + \\ &\quad C(z)C(y) \otimes C(x) + C(z)C(y)C(x) \otimes I) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (-I \otimes C(x)C(y)C(z) - C(x) \otimes C(y)C(z) - C(y) \otimes C(x)C(z) - \\ &\quad C(x)C(y) \otimes C(z) - C(z) \otimes C(x)C(y) - C(x)C(z) \otimes C(y) - \\ &\quad C(y)C(z) \otimes C(x) - C(x)C(y)C(z) \otimes I) \end{aligned}$$

Durch Addition erhalten wir $[f(x), f(y), f(z)]_+ = 0$.

$$\begin{aligned} f(x)f(y)f(z)^* &= \frac{\sqrt{2}}{4} (I \otimes C(x)C(y)C(z)^* + C(z)^* \otimes C(x)C(y) + C(y) \otimes C(x)C(z)^* + \\ &\quad C(y)C(z)^* \otimes C(x) + C(x) \otimes C(y)C(z)^* + C(x)C(z)^* \otimes C(y) \\ &\quad C(x)C(y) \otimes C(z)^* + C(x)C(y)C(z)^* \otimes I) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(z)^*C(y)C(x) &= ((y, z)I - C(y)C(z)^*)C(x) \\ &= (y, z)C(x) - C(y)((x, z)I - C(x)C(z)^*) \end{aligned}$$

$$= (y,z)C(x) - (x,z)C(y) - C(x)C(y)C(z)^* \\$$

$$f(z)^* f(y) f(x) = \frac{1}{4} ((y,z)I \otimes C(x) - (x,z)I \otimes C(y) - I \otimes C(x)C(y)C(z)^* + \\ (y,z)C(x) \otimes I - C(x) \otimes C(y)C(z)^* + (x,y)C(y) \otimes I - \\ C(y) \otimes C(x)C(z)^* - C(x)C(y) \otimes C(z)^* - C(z)^* \otimes C(x)C(y) + \\ (x,z)I \otimes C(y) - C(x)C(z)^* \otimes C(y) + (y,z)I \otimes C(x) - \\ C(y)C(z)^* \otimes C(x) + (y,z)C(x) \otimes I - (x,z)C(y) \otimes I - \\ C(x)C(y)C(z)^* \otimes I) \\$$

$$\text{Wir erhalten dann } [f(x), f(y), f(z)^*]_+ = (y,z)f(x) \quad . \\$$

$$f(x)f(y)^* f(z) = \frac{1}{4} (I \otimes C(x)C(y)^* C(z) + C(z) \otimes C(x)C(y)^* + \\ C(y)^* \otimes C(x)C(z) + C(y)^* C(z) \otimes C(x) + \\ C(x) \otimes C(y)^* C(z) + C(x)C(z) \otimes C(y)^* + \\ C(x)C(y)^* \otimes C(z) + C(x)C(y)^* C(z) \otimes I) \\$$

$$C(z)C(y)^* C(x) = ((z,y)I - C(y)^* C(z))C(x) \\ = (z,y)C(x) + ((x,y)I - C(x)C(y)^*)C(z) \\ = (z,y)C(x) + (x,y)C(z) - C(x)C(y)^* C(z) \\$$

$$f(z)f(y)^* f(x) = \frac{1}{4} ((z,y)I \otimes C(x) + (x,y)I \otimes C(z) - I \otimes C(x)C(y)^* C(z) + \\ (z,y)C(x) \otimes I - C(x) \otimes C(y)^* C(z) + (x,y)I \otimes C(z) - \\ C(x)C(y)^* \otimes C(z) + (x,y)C(z) \otimes I - C(z) \otimes C(x)C(y)^* + \\ (z,y)I \otimes C(x) - C(y)^* C(z) \otimes C(x) + (z,y)C(x) \otimes I + \\ (x,y)C(z) \otimes I - C(x)C(y)^* C(z) \otimes I) \\$$

$$\text{Daraus folgt } [f(x), f(y)^*, f(z)]_+ = (x,y)f(z) + (z,y)f(x) \quad . \quad \blacksquare \\$$

In der Folge werden wir die Bezeichnungen aus Scheibas Arbeit (s. Anhang) verwenden. Wir wollen mit Hilfe von Theorem 3.2 aus dieser Arbeit zeigen, daß $H := \Lambda E \otimes \Lambda E$ $n+1$ unter der Darstellung f invariante Teilräume besitzt. Zu diesem Zweck beweisen wir als erstes, daß für alle $(M, K, L, N) \in \mathfrak{F}_n$ das Bild der Projektionen $P(M, K, L, N)$ eindimensional ist.

Lemma 1 Für alle $(M, K, L, N) \in \mathfrak{F}_n$ gilt: $\dim \text{Bild}(P(M, K, L, N)) = 1$

Bew.: $\mathfrak{F}_n$ enthält 4^n Elemente, nämlich alle Zerlegungen von $\{1 \dots n\}$ in 4 disjunkte Teilmengen. Die Projektionen $P(M, K, L, N), (M, K, L, N) \in \mathfrak{F}_n$, sind paarweise orthogonal. Da $\dim H = 4^n$ ist, reicht es zu zeigen:

$$\text{Bild}(P(M, K, L, N)) \neq \{0\} \quad (M, K, L, N) \in \mathfrak{F}_n \\$$

$$e_{(M, K, L, N)} := \left| \bigotimes_{i \in M \cup K \cup L} e_i \right| \otimes \left| \bigotimes_{i \in L} e_i \right| \\$$

Wir setzen jetzt zur Abkürzung: $f_i := f(e_i)$ und $C_i := C(e_i)$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ läßt $R_n = f_n^{*2} f_n^2 = C_n^{*2} C_n^2 = e_{(M, K, L, N)}$ invariant.

Entsprechend gilt für alle $l \in L$ $Z_1 e_{(M, K, L, N)} = e_{(M, K, L, N)}$.

$$S_k = f_k^* f_k^* f_k^* f_k^* = \frac{1}{2} (C_k^* \otimes C_k + C_k C_k^* \otimes C_k^* C_k + C_k^* C_k \otimes C_k^* C_k + C_k \otimes C_k^*)$$

$$S_k e_{(M,K,L,N)} = \frac{1}{2} (e_{(M,K,L,N)} + C_k^* \otimes C_k e_{(M,K,L,N)}) \quad , \text{ falls } k \in K$$

Die Vektoren $e_{(M,K,L,N)}$ und $C_k^* \otimes C_k e_{(M,K,L,N)}$ sind aber linear unabhängig, da e_k einmal im ersten und einmal im zweiten Faktor des Tensorprodukts auftritt.

$$P_m = f_m^* f_m^* f_m^* f_m^* = \frac{1}{2} (I \otimes C_m^* C_m + C_m \otimes C_m^* C_m + C_m^* \otimes C_m + C_m C_m^* \otimes I) + C_m^* C_m \otimes C_m^* C_m$$

$$(I - P_m) e_{(M,K,L,N)} = \frac{1}{2} (e_{(M,K,L,N)} - C_m^* \otimes C_m e_{(M,K,L,N)}) \quad , \text{ falls } m \in M$$

Die Vektoren $e_{(M,K,L,N)}$ und $C_m^* \otimes C_m e_{(M,K,L,N)}$ sind wieder linear unabhängig.

Aus den obigen Überlegungen wird klar, daß $P(M,K,L,N) e_{(M,K,L,N)}$ in $2^{|M|+|K|}$ linear unabhängige Vektoren aufspaltet, so daß sicher $P(M,K,L,N) e_{(M,K,L,N)} \neq 0$ ist. ■

Nach Theorem 3.2 ist dann $H(j, n-j)$, $j=0..n$, ein invarianter Unterraum der Darstellung f . Die von $f|_{H(j, n-j)}$ induzierte Darstellung ist dann unitär äquivalent zur irreduziblen Darstellung von $PF(E)$ über $\mathbb{C}^{\mathfrak{F}(j, n-j)}$ (vgl. [Scheiba], Theorem 3.1).

Theorem 1 Die von $f|_{H(j, n-j)}$, $j=0..n$, induzierte Darstellung von $PF(E)$ ist unitär äquivalent zur Darstellung über $\mathbb{C}^{\mathfrak{F}(j, n-j)}$.

Bew.: Lemma 1 und [Scheiba], Theorem 3.2 ■

Als nächstes zeigen wir die Inäquivalenz obiger Darstellungen, indem wir nachweisen, daß die Dimensionen der Räume $H(j, n-j)$, $j=0..n$, alle verschieden sind. Für die nachfolgenden kombinatorischen Überlegungen benötigen wir einige Definitionen.

Def.: Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ und $j, n \in \mathbb{N}$ mit $j \leq n$.

$$A + n := \{a+n \mid a \in A\}$$

$$I_n := \{1 \dots n\}$$

$$A - n := \{a-n \mid a \in A\}$$

$$P_j^n := \{J \subseteq I_n \mid |J| = j\}$$

Lemma 2 Sei $j + k = n$. Dann gilt: $d(j, k) = \binom{2n+1}{2j+1} = \binom{2n+1}{2k}$.

Bew.: Die Gültigkeit des zweiten Gleichheitszeichens ist trivial.

Zum Beweis der ersten Gleichung zeigen wir, daß sich $\mathfrak{F}(j, k)$ bijektiv auf P_{2j+1}^{2n+1} (P_{2k}^{2n+1}) abbilden läßt.

$$I \quad j < k$$

$$f : \mathfrak{F}(j, k) \longrightarrow P_{2j+1}^{2n+1}$$

$$f((M, K, L, N)) := \begin{cases} L \cup N+n \cup K \cup K+n & |L| + |N| \text{ ungerade} \\ L \cup N+n \cup M \cup M+n \cup \{2n+1\} & |L| + |N| \text{ gerade} \end{cases}$$

Man beachte hierbei:

$$\begin{aligned}
 |f(M, K, L, N)| &= \begin{cases} |L| + |N| + 2|K| & |L| + |N| \text{ ungerade} \\ |L| + |N| + 2|M| + 1 & |L| + |N| \text{ gerade} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} |L| + |N| + 2(j - \frac{1}{2}(|L| + |N| - 1)) & \\ |L| + |N| + 2(j - \frac{1}{2}(|L| + |N|)) + 1 & \end{cases} \\
 &= 2j + 1
 \end{aligned}$$

Wir definieren jetzt die Umkehrabbildung $g: P_{2j+1}^{2n+1} \longrightarrow \mathcal{F}(j, k)$

$$g(j) := \begin{cases} (I_n \setminus (J \cup J - n), J \cap J - n, (J \cap I_n) \setminus J - n, (J - n \cap I_n) \setminus J) & 2n+1 \notin J \\ (J \cap J - n, I_n \setminus (J \cup J - n), (J \cap I_n) \setminus J - n, (J - n \cap I_n) \setminus J) & 2n+1 \in J \end{cases}$$

Aufgrund der Gleichung

$$2j+1 = |J| = \begin{cases} 2|J \cap J - n| + |(J \cap I_n) \setminus J - n| + |(J - n \cap I_n) \setminus J| & 2n+1 \notin J \\ 2|J \cap J - n| + |(J \cap I_n) \setminus J - n| + |(J - n \cap I_n) \setminus J| + 1 & 2n+1 \in J \end{cases}$$

erhält man sofort, daß genau dann $2n+1 \in J$ ist, wenn

$|J \cap I_n| \setminus J - n| + |(J - n \cap I_n) \setminus J|$ gerade ist.

Man verifiziert nun leicht, daß g tatsächlich die Umkehrabbildung von f ist.

II $j \geq k$

Der Beweis verläuft wie unter I. Wir geben hier nur die Abbildungen f und g an.

$$f: \mathcal{F}(j, k) \longrightarrow P_{2k}^{2n+1}$$

$$f(M, K, L, N) := \begin{cases} L \cup N + n \cup K \cup K + n & |L| + |N| \text{ gerade} \\ L \cup N + n \cup M \cup M + n \cup \{2n+1\} & |L| + |N| \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$g: P_{2k}^{2n+1} \longrightarrow \mathcal{F}(j, k)$$

$$g(j) := \begin{cases} (I_n \setminus (J \cup J - n), J \cap J - n, (J \cap I_n) \setminus J - n, (J - n \cap I_n) \setminus J) & 2n+1 \notin J \\ (J \cap J - n, I_n \setminus (J \cup J - n), (J \cap I_n) \setminus J - n, (J - n \cap I_n) \setminus J) & 2n+1 \in J \end{cases}$$

Satz 2 Die von $f|_{H(j, n-j)}, j=0 \dots n$, induzierten Darstellungen von $PF(E)$ sind inäquivalent.

Bew.: Die Behauptung folgt unmittelbar aus Lemma 2, wenn man bedenkt, daß $\dim H(j, n-j) = d(j, n-j)$ gilt. ■

Mit Hilfe von Lemma 2 können wir jetzt auch die Dimension von $PF(E)$ für n -dimensionales E bestimmen.

Satz 3 Sei E ein n -dimensionaler komplexer Hilbertraum. Dann gilt:

$$\dim PF(E) = \binom{4n+1}{2n}$$

Bew.: Aus [Scheiba], Theorem 4.2 folgt: $\dim PF(E) = \sum_{j=0}^n d(j, n-j)^2$

$$\begin{aligned} \dim PF(E) &= \sum_{j=0}^n d(j, n-j)^2 = \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{2j+1}^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{2n}{2j+1} + \binom{2n}{2j} \right)^2 + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{2n}{2j+1}^2 + 2 \binom{2n}{2j+1} \binom{2n}{2j} + \binom{2n}{2j}^2 \right) + 1 \\ &= \sum_{j=0}^{2n} \binom{2n}{j}^2 + 2 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{2n}{2j+1} \binom{2n}{2j} \\ &= \binom{4n}{2n} + \sum_{j=0}^{n-1} \left(\binom{2n}{2j+1} \binom{2n}{2j} + \binom{2n}{2(n-j)} \binom{2n}{2(n-j)-1} \right) \\ &= \binom{4n}{2n} + \sum_{j=1}^{2n} \binom{2n}{j} \binom{2n}{j-1} = \binom{4n}{2n} + \binom{4n}{2n-1} = \binom{4n+1}{2n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Satz 4 Die von f induzierte Darstellung von $PF(E)$ über $\Lambda E \otimes \Lambda E$ ist treu.

Bew.: Die Behauptung ergibt sich durch Dimensionsvergleich.

Nach Theorem 1 sind die Darstellungen $f|_{H(j, n-j)}$ irreduzibel.

Da aber jede irreduzible $\ast$ -Darstellung einer $\ast$ -Algebra mit 1

über einem endlichdimensionalen Hilbertraum surjektiv ist, gilt

$f|_{H(j, n-j)}(PF(E)) = L(H(j, n-j))$. Diese Gleichung impliziert dann

$$\dim f(PF(E)) = \sum_{j=1}^n \dim L(H(j, n-j)) = \sum_{j=1}^n d(j, n-j)^2 = \dim PF(E) \quad \blacksquare$$

IV Irreduzible Darstellungen von $PF(E)$ für separables E

Das Ziel dieses Kapitels ist es, abzählbar viele irreduzible, inäquivalente Darstellungen von $PF(E)$ für separables, unendlichdimensionales E zu konstruieren. Es zeigt sich, daß sich die von $f|_{H(0,n)}$ induzierte Darstellung leicht auf unendlichdimensionales E übertragen läßt. Wir betrachten diese Darstellung etwas genauer. Sei $I := \{1 \dots n\}$.

$$\mathfrak{I}(0,n) = \{(\emptyset, I, \emptyset, \emptyset), (I \setminus \{1\}, \emptyset, \{1\}, \emptyset), \dots, (I \setminus \{n\}, \emptyset, \{n\}, \emptyset), \\ (I \setminus \{1\}, \emptyset, \emptyset, \{1\}), \dots, (I \setminus \{n\}, \emptyset, \emptyset, \{n\})\}$$

Wie man leicht nachrechnet, gilt für alle $i \in I$:

$$f_i P(\emptyset, I, \emptyset, \emptyset) = P(I \setminus \{i\}, \emptyset, \{i\}, \emptyset) f_i$$

$$f_i P(I \setminus \{j\}, \emptyset, \{j\}, \emptyset) = 0$$

$$f_i P(I \setminus \{j\}, \emptyset, \emptyset, \{j\}) = \delta_{ij} P(\emptyset, I, \emptyset, \emptyset) f_i$$

Man sieht, daß man $H(0,n)$ als orthogonale Summe $\bigoplus_{i \in I} E$ realisieren kann. Die Darstellungsoperatoren sind Operatoren mit zweidimensionalem Bild. Diese Überlegungen führen zu folgenden Definitionen.

Def.: Sei E ein komplexer, separabler Hilbertraum mit Konjugation K .

Wir definieren dann:

$$F := \mathbb{C} \oplus E \oplus E$$

$$U: E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto (0, x, 0)$$

$$V: E \longrightarrow F$$

$$x \longmapsto (0, 0, Kx)$$

$$f_x: F \longrightarrow F$$

$$a \longmapsto (a, 1)Ux + (a, Vx)1$$

für alle $x \in E$

Bem.: $f_x^* = (\cdot, Ux)1 + (\cdot, 1)Vx$

Satz 1 (E, f, F) ist ein Parafermisystem 2. Ordnung.

Bew.: f ist offensichtlich linear. Wir zeigen jetzt, daß die Operatoren $f_x, x \in E$, die Parafermirelationen erfüllen. Sei $a \in F$.

$$f_z a = (a, 1)Uz + (a, Vz)1$$

$$f_y f_z a = (a, Vz)Uy$$

$$(Uz, 1) = (Uz, Vy) = (1, Vy) = 0$$

$$f_x f_y f_z a = 0$$

Dies zeigt $[f_x, f_y, f_z]_+ = 0$.

$$f_z^* a = (a, Uz)1 + (a, 1)Vz$$

$$f_y f_z^* a = (a, Uz)Uy + (a, 1)(Vz, Vy)1$$

$$f_x f_y f_z^* a = (y, z)(a, 1)Ux$$

$$(Vz, Vy) = (Kz, Ky) = (y, z)$$

$$f_y f_x a = (a, Vx)Uy$$

$$f_z^* f_y f_x a = (a, Vx)(Uy, Uz)1 \\ = (y, z)(a, Vx)1 \quad (Uy, Uz) = (y, z)$$

$$\text{Folglich ist } [f_x, f_y, f_z^*]_+ = (y, z)f_x \quad .$$

$$f_z a = (a, 1)Uz + (a, Vz)1$$

$$f_y^* f_z a = (a, 1)(Uz, Uy)1 + (a, Vz)Vy$$

$$f_x f_y^* f_z a = (a, 1)(Uz, Uy)Ux + (a, Vz)(Vy, Vx)1 \\ = (z, y)(a, 1)Ux + (x, y)(a, Vz)1$$

$$f_z f_y^* f_x a = (x, y)(a, 1)Uz + (z, y)(a, Vx)1$$

$$\text{Daraus folgt } [f_x, f_y^*, f_z]_+ = (x, y)f_z + (z, y)f_x \quad . \quad \blacksquare$$

Wir haben jetzt also eine Darstellung von $PF(E)$ gewonnen, indem wir von der einfachsten -außer der Nulldarstellung- Darstellung von $PF(E)$ bei endlichdimensionalem E ausgegangen sind. Die nächsteinfacheren Darstellungen operieren über $H(n-1, 1)$ und $H(1, n-1)$. Die Dimensionen dieser Räume betragen $\binom{2n+1}{2}$

bzw. $\binom{2n+1}{3}$. Allgemein kann man sagen, daß die Dimension der Darstellungsräume jeweils $\binom{2n+1}{j}$, $j=0 \dots n$, beträgt. Diese Betrachtungen legen es nahe, Darstellungen von $PF(E)$ über $\hat{\Lambda}^n_F, n \in \mathbb{N}$, zu konstruieren.

Im folgenden sei E ein separabler, unendlichdimensionaler Hilbertraum.

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $x \in E$. Wir definieren dann:

$$f_n(x) : \hat{\Lambda}^n_F \longrightarrow \hat{\Lambda}^n_F$$

$$a_1 \wedge \dots \wedge a_n \longmapsto \sum_{j=1}^n a_1 \wedge \dots \wedge f_x a_j \wedge \dots \wedge a_n$$

und lineare, stetige Fortsetzung

Bem.: Die Stetigkeit von $f_n(x)$ sieht man am einfachsten, wenn man bedenkt, daß $f_n(x)$ die Einschränkung auf $\hat{\Lambda}^n_F$ des unten definierten stetigen Operators $g_n(x)$ ist.

$$g_n(x) : \hat{\otimes}^n_F \longrightarrow \hat{\otimes}^n_F \quad g_n(x) := f_x \otimes \dots \otimes I + I \otimes f_x \otimes \dots \otimes I + \dots + I \otimes \dots \otimes f_x$$

Satz 2 Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(E, f_n, \hat{\Lambda}^n_F)$ ein Parafermisystem 2. Ordnung.

Bew.: Der Beweis erfolgt durch einfache, aber etwas langwierige Rechnungen. Zur Abkürzung der Rechnungen zeigen wir, daß die Parafermirelationen jeweils auf geeigneten Orthonormalbasen von $\hat{\Lambda}^n_F$ erfüllt sind. Seien $x, y, z \in E$ mit $\|x\| = \|y\| = \|z\| = 1$.

Zum Nachweis der ersten Relation benutzen wir folgende Orthonormalbasis von F :

$$ONB_1 := \{a_1 \mid a_1 = 1, a_2 = Vy, (a_1, Vx) = (a_1, Vz) = 0 \text{ für } i \geq 5\}$$

$$\begin{aligned}
f_n(z)a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} &= f_z a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} + a_{i_1} \wedge f_z a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge f_z a_{i_3} \wedge \dots \wedge a_{i_n} + a_{i_1} \wedge \dots \wedge f_z a_{i_4} \wedge \dots \wedge a_{i_n} \\
&= (a_{i_1}, 1) U_z a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_n} + (a_{i_1}, V_z) 1 \wedge a_{i_2} \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_2}, V_z) (1 - \delta_{i_1 1}) a_{i_1} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_3}, V_z) (1 - \delta_{i_1 1}) a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_4}, V_z) (1 - \delta_{i_1 1}) a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge a_{i_3} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n}
\end{aligned}$$

Der letzte Summand verschwindet, da in jedem Fall $(a_{i_4}, V_z)(1 - \delta_{i_1 1}) = 0$.

Für $i_1 = 1$ ist $1 - \delta_{i_1 1} = 0$. Im Falle $i_1 > 1$ muß aber $i_4 \geq 5$ sein, so daß dann $(a_{i_4}, V_z) = 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
f_n(y)f_n(z)a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} &= (a_{i_1}, 1)(a_{i_2}, V_y) U_z \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_1}, V_z) U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_2}, V_z)(1 - \delta_{i_1 1}) a_{i_1} \wedge U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_3}, V_z)(1 - \delta_{i_1 1}) a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n(x)f_n(y)f_n(z)a_{i_1} \dots a_{i_n} &= (a_{i_1}, 1)(a_{i_2}, V_y) U_z \wedge U_x \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_1}, V_z)(a_{i_2}, V_x) U_y \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_2}, V_z)(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_1}, V_x) 1 \wedge U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_2}, V_z)(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_3}, V_x) a_{i_1} \wedge U_y \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_3}, V_z)(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_2}, V_x) a_{i_1} \wedge 1 \wedge U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n}
\end{aligned}$$

Bei diesen Rechnungen haben wir oft ausgenutzt, daß Produkte von Skalarprodukten, wie z.B. $(a_{i_1}, V_z)(a_{i_3}, V_x)$, aufgrund der speziellen Wahl der Orthonormalbasis verschwinden. Wegen der Gleichungen $(1 - \delta_{i_1 1})a_{i_1} \wedge 1 = a_{i_1} \wedge 1$ und $(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_1}, V_x) = (a_{i_1}, V_x)$ können wir obiges Ergebnis vereinfachen. Zur Abkürzung schreiben wir zukünftig a an Stelle von $a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n}$.

$$\begin{aligned}
f_n(x)f_n(y)f_n(z)a &= (a_{i_1}, 1)(a_{i_2}, V_y) U_z \wedge U_x \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad ((a_{i_1}, V_x)(a_{i_2}, V_z) - (a_{i_1}, V_z)(a_{i_2}, V_x)) 1 \wedge U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad ((a_{i_3}, V_z)(a_{i_2}, V_x) - (a_{i_2}, V_z)(a_{i_3}, V_x)) a_{i_1} \wedge 1 \wedge U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $[f_n(x), f_n(y), f_n(z)]_+ = 0$.

Zum Nachweis der zweiten Relation benutzen wir:

$$ONB_2 := \{a_i \mid a_1 = 1, a_2 = U_z, a_3 = V_y, (a_i, V_x) = 0 \text{ für } i \geq 5\}$$

$$\begin{aligned}
f_n(z)^* a &= (a_{i_1}, U_z) 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + (a_{i_1}, 1) V_z \wedge \dots \wedge a_{i_n} \\
f_n(y)f_n(z)^* a &= (a_{i_1}, U_z) U_y \wedge \dots \wedge a_{i_n} + (a_{i_1}, 1)(V_z, V_y) 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_1}, 1)(a_{i_2}, V_y) V_z \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
&\quad (a_{i_1}, 1)(a_{i_3}, V_y) V_z \wedge a_{i_2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_n(x)f_n(y)f_n(z)^*a &= (a_{i1}, Uz)(a_{i2}, Vx)Uy \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, Uz)(a_{i3}, Vx)Uy \wedge a_{i2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (y, z)(a_{i1}, 1)Ux \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, 1)(a_{i2}, Vy)Vz \wedge Ux \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, 1)(a_{i3}, Vy)Vz \wedge a_{i2} \wedge Ux \wedge \dots \wedge a_{in} \\
f_n(x)a &= (a_{i1}, 1)Ux \wedge \dots \wedge a_{in} + (a_{i1}, Vx)1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i2}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i3}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge a_{i2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} \\
f_n(y)f_n(x)a &= (a_{i1}, 1)(a_{i2}, Vy)Ux \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, 1)(a_{i3}, Vy)Ux \wedge a_{i2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, Vx)Uy \wedge \dots \wedge a_{in} + (a_{i2}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge Uy \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i3}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge a_{i2} \wedge Uy \wedge \dots \wedge a_{in} \\
f_n(z)^*f_n(y)f_n(x)a &= (a_{i1}, 1)(a_{i2}, Vy)Ux \wedge Vz \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, 1)(a_{i3}, Vy)Ux \wedge a_{i2} \wedge Vz \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, Vx)(Uy, Uz)1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i2}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})(a_{i1}, Uz)1 \wedge Uy \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i2}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})(Uy, Uz)a_{i1} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i3}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})(a_{i1}, Uz)1 \wedge a_{i2} \wedge Uy \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i3}, Vx)(1 - \delta_{i1,1})(Uy, Uz)a_{i1} \wedge a_{i2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in}
\end{aligned}$$

Den Faktor $(1 - \delta_{i1,1})$ kann man aufgrund derselben Überlegungen wie oben weglassen. Berücksichtigt man $(Uy, Uz) = (y, z)$, so folgt unmittelbar

$$[f_n(x), f_n(y), f_n(z)^*]_+ = (y, z)f_n(x)$$

Zum Nachweis der letzten Parafermirelation benutzen wir:

$$ONB_3 := \{a_i \mid a_1 = 1, a_2 = Uy, (a_i, Vx) = (a_i, Vz) = 0 \text{ für } i \geq 5\}$$

$$\begin{aligned}
f_n(z)a &= (a_{i1}, 1)Uz \wedge \dots \wedge a_{in} + (a_{i1}, Vz)1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i2}, Vz)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i3}, Vz)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge a_{i2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} \\
f_n(y)^*f_n(z)a &= (a_{i1}, 1)(Uz, Uy)1 \wedge \dots \wedge a_{in} + (a_{i1}, 1)(a_{i2}, Uy)Uz \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i1}, Vz)Vy \wedge \dots \wedge a_{in} + (a_{i2}, Vz)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge Vy \wedge \dots \wedge a_{in} + \\
&\quad (a_{i3}, Vz)(1 - \delta_{i1,1})a_{i1} \wedge a_{i2} \wedge Vy \wedge \dots \wedge a_{in} \\
f_n(x)f_n(y)^*f_n(z)a &= (z, y)(a_{i1}, 1)Ux \wedge \dots \wedge a_{in} + (a_{i1}, 1)(a_{i2}, Uy)Uz \wedge Ux \wedge \dots \wedge a_{in} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a_{i_1}, Vz)(Vy, Vx)1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + (a_{i_1}, Vz)(a_{i_2}, Vx)Vy1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (a_{i_2}, Vz)(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_1}, Vx)1 \wedge Vy \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (a_{i_2}, Vz)(1 - \delta_{i_1 1})(Vy, Vx)a_{i_1} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (a_{i_2}, Vz)(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_3}, Vx)a_{i_1} \wedge Vy \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (a_{i_3}, Vz)(1 - \delta_{i_1 1})(a_{i_2}, Vx)a_{i_1} \wedge 1 \wedge Vy \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (a_{i_3}, Vz)(1 - \delta_{i_1 1})(Vy, Vx)a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} \\
= & (z, y)(a_{i_1}, 1)Ux \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (x, y)((a_{i_1}, Vz)1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + (a_{i_2}, Vz)a_{i_1} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& (a_{i_3}, Vz)a_{i_1} \wedge a_{i_2} \wedge 1 \wedge \dots \wedge a_{i_n}) + \\
& (a_{i_1}, 1)(a_{i_2}, Uy)Uz \wedge Ux \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& ((a_{i_2}, Vz)(a_{i_1}, Vx) - (a_{i_1}, Vz)(a_{i_2}, Vx))1 \wedge Vy \wedge \dots \wedge a_{i_n} + \\
& ((a_{i_3}, Vz)(a_{i_2}, Vx) - (a_{i_2}, Vz)(a_{i_3}, Vx))a_{i_1} \wedge 1 \wedge Vy \wedge \dots \wedge a_{i_n}
\end{aligned}$$

Durch Vertauschen von x und z und anschließende Addition erhält man

$$[f_n(x), f_n(y)^*, f_n(z)]_+ = (x, y)f_n(z) + (z, y)f_n(x) \quad . \blacksquare$$

Wir wollen nun zeigen, daß die Darstellungen f_n irreduzibel und unitär in-äquivalent sind. Den Beweis der Irreduzibilität werden wir mit dem Lemma von Haag/Schroer führen. Wir müssen uns folglich näher mit Projektionen in $\hat{\Lambda}^n F$ beschäftigen.

Def.: Sei $\{e_i | i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E . Wir setzen dann für alle $i \in \mathbb{N}$:

$$a_{i1} := 1, \quad a_{2i} := Ue_i, \quad a_{2i+1} := Ve_i.$$

Bem.: $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$ ist offensichtlich eine Orthonormalbasis von F .

Lemma 1 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
f_n(e_j)a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} &= \begin{cases} a_{2j} \wedge \dots \wedge a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 = 1 \wedge 2j \notin I \\ a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 \neq 1 \wedge i_1 = 2j+1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
f_n(e_j)^* a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} &= \begin{cases} a_{2j+1} \wedge \dots \wedge a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 = 1 \wedge 2j+1 \notin I \\ a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 \neq 1 \wedge i_1 = 2j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$I := \{i_1, \dots, i_n\} \quad \text{und} \quad i_1 < i_2 < \dots < i_n$$

Bew.: Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt:

$$f_{e_j} = (\cdot, a_1)a_{2j} + (\cdot, a_{2j+1})a_1 \quad \text{und}$$

$$f_{e_j}^* = (\cdot, a_{2j})a_1 + (\cdot, a_1)a_{2j+1}$$

Man verifiziert die Behauptungen nun durch einfaches Nachrechnen. ■

Lemma 2 Sei $n \in \mathbb{N}$. Für die Orthogonalprojektionen $R_n(j) := f_n(e_j)^{*2} f_n(e_j)^2$ gilt:

$$a) \quad R_n(1) \dots R_n(n) = P \langle a_3 \wedge a_5 \wedge \dots \wedge a_{2n+1} \rangle$$

$$b) \quad R_j(1) \dots R_j(n) = 0 \quad \text{für } 1 \leq j < n$$

Bew.: Aus Lemma 1 erhält man folgende Relationen:

$$f_n(j)^2 a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} = \begin{cases} a_{2j} \wedge \dots \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 = 1 \wedge 2j \notin I \wedge i_1 = 2j+1 \\ a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{2j} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 \neq 1 \wedge i_1 = 2j+1 \wedge 2j \notin I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{2j} \wedge \dots \wedge a_{i_n} \\ a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{2j} \wedge \dots \wedge a_{i_n} \\ 0 \end{cases}$$

$$f_n(j)^{*2} a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} = \begin{cases} -a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{2j+1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 = 1 \wedge 2j+1 \notin I \wedge i_1 = 2j \\ a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{2j+1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & i_1 \neq 1 \wedge i_1 = 2j \wedge 2j+1 \notin I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$R_n(j) a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} = \begin{cases} a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n} & 2j+1 \in I \wedge 2j \notin I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Aus der letzten Gleichung ergeben sich sofort beide Behauptungen. ■

Satz 3 Die Darstellungen f_n sind irreduzibel.

Bew.: Wir wollen das Lemma von Haag/Schroer anwenden. Wegen Lemma 2a)

müssen wir nur noch zeigen, daß $a_3 \wedge \dots \wedge a_{2j+1} \wedge \dots \wedge a_{2n+1}$ zyklischer Vektor der Darstellung f_n ist.

Sei $a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n}$ ein beliebiger Basisvektor von $\wedge^n F$.

$$2j+1 \in \{3, \dots, 2n+1\} \setminus I \implies f_n(j) a_3 \wedge \dots \wedge a_{2n+1} = a_3 \wedge \dots \wedge a_1 \wedge \dots \wedge a_{2n+1}$$

$$i \in I \setminus \{1, \dots, 2n+1\}$$

$$i=2k \implies f_n(k) f_n(j) a_3 \wedge \dots \wedge a_{2n+1} = a_3 \wedge \dots \wedge a_{2k} \wedge \dots \wedge a_{2n+1}$$

$$i=2k+1 \implies f_n(k)^{*} f_n(j) a_3 \wedge \dots \wedge a_{2n+1} = a_3 \wedge \dots \wedge a_{2k+1} \wedge \dots \wedge a_{2n+1}$$

Wir haben in obigem Schritt also einen Index aus $\{3, \dots, 2j+1, \dots, 2n+1\}$ durch einen Index aus I ersetzt. Wiederholt man diesen Schritt gegebenenfalls, so erhält man zu jedem Basisvektor $a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n}$ ein $u \in PF(E)$, so daß $f_n(u) a_3 \wedge \dots \wedge a_{2j+1} \wedge \dots \wedge a_{2n+1} = a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_n}$ gilt. Folglich ist $a_3 \wedge \dots \wedge a_{2j+1} \wedge \dots \wedge a_{2n+1}$ zyklischer Vektor. ■

Satz 4 Die Darstellungen f_n sind unitär inäquivalent.

Bew.: Sei $m < n$.

$$R_m(1) \dots R_m(n) = 0 \neq P \langle a_3 \wedge \dots \wedge a_{2n+1} \rangle = R_n(1) \dots R_n(n)$$

Satz 5 Die Darstellungen $f_n, n \in \mathbb{N}$, und die Fockdarstellung sind inäquivalent.

Bew.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $R_{F_0}(1) \dots R_{F_0}(n+1) \neq 0$. Es gilt nämlich:

$$R_{F_0}(1) \dots R_{F_0}(n+1) \Omega = \Omega$$

■

V Die Paracliffordalgebra 2.Ordnung

Wir geben zuerst die Definition der Paracliffordalgebra und zeigen dann, wie sich diese Algebra durch eine universelle Eigenschaft charakterisieren läßt. Mit Hilfe der universellen Eigenschaft beweisen wir dann das wichtigste Resultat dieses Kapitels, die Isomorphie zwischen Parafermialalgebra und Paracliffordalgebra. Diese Isomorphie motiviert weitgehend das Studium der Paracliffordalgebra.

Def.: Sei E ein K -Vektorraum mit symmetrischer Bilinearform b . Paracliffordalgebra 2.Ordnung über (E, b) heißt der Quotient von $\otimes E$ nach dem von den Elementen der Form

$$x \otimes y \otimes x - 2b(x, y)x \quad , x, y \in E,$$

erzeugten zweiseitigen Ideal J . Wir bezeichnen die Paracliffordalgebra über (E, b) mit $PC(E, b)$.

Ist E ein komplexer Hilbertraum und wählt man als b die Nullform, so ist $PC(E, b)$ nichts anderes als $F_0(E)$. Das oben definierte Ideal J ist dann nämlich $\text{Kern}(P|_{\otimes E})$, und $F_0(E)$ ist ja isomorph zu $\otimes E / \text{Kern}(P|_{\otimes E})$. Die Paracliffordalgebra $PC(E, b)$ ist in diesem Sinne genauso eine Verallgemeinerung von $F_0(E)$, wie die Clifffordalgebra $C(E, b)$ eine Verallgemeinerung der äußeren Algebra $\wedge E$ ist.

Wir werden nun nachweisen, daß sich $PC(E, b)$ durch eine universelle Eigenschaft beschreiben läßt. Wir benötigen dazu die folgenden Definitionen.

Def.: Seien $\zeta: E \longrightarrow \otimes E$ und $\zeta: \otimes E \longrightarrow \otimes E/J$ jeweils die kanonische Injektion bzw. Surjektion. Wir definieren dann $p: E \longrightarrow PC(E, b)$ durch $p := \zeta \circ \zeta$.

Bem.: Da ζ injektiv ist, werden wir Einfachheit halber x statt $\zeta(x)$ schreiben.

Satz 1 Für alle $x, y, z \in E$ gilt:

$$[p(x), p(y), p(z)]_+ = 2b(x, y)p(z) + 2b(z, y)p(x)$$

$$\text{Bew.: } p(x)p(y)p(x) = \zeta(\zeta(x)\zeta(y)\zeta(x)) = \zeta(2b(x, y)x) = 2b(x, y)p(x)$$

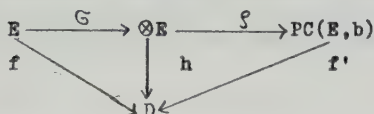
$$\begin{aligned} [p(x), p(y), p(z)]_+ &= p(x)p(y)p(z) + p(z)p(y)p(x) \\ &= p(x+z)p(y)p(x+z) - p(x)p(y)p(x) - p(z)p(y)p(z) \\ &= 2b(x+z, y)p(x+z) - 2b(x, y)p(x) - 2b(z, y)p(z) \\ &= 2b(x, y)p(z) + 2b(z, y)p(x) \end{aligned}$$

Satz 2 (Universelle Eigenschaft von $PC(E, b)$)

Sei E ein K -Vektorraum mit Bilinearform b . Sei f eine lineare Abbildung in eine K -Algebra mit 1 D , die die Paracliffordrelation erfüllt, d.h., daß für alle $x, y \in E$ gilt: $f(x)f(y)f(x) = 2b(x, y)f(x)$. Dann existiert genau ein Algebrenhomomorphismus f' von $PC(E, b)$ nach D mit folgenden Eigenschaften:

$$(+)\quad f = f' \circ \rho \quad \text{und} \quad f'(1_{PC(E,b)}) = 1_D.$$

Bew.: Die Eindeutigkeit von f' folgt aus (+) und der Tatsache, daß die Algebra $PC(E,b)$ von $1_{PC(E,b)}$ und den $p(x), x \in E$, erzeugt wird. Die Existenz von f' beruht im wesentlichen auf der universellen Eigenschaft von $\otimes E$. Wir betrachten dazu das folgende Diagramm.



Aufgrund der universellen Eigenschaft von $\otimes E$ existiert genau ein Algebrenhomomorphismus h mit $h \circ \rho = f$ und $h(1_{\otimes E}) = 1_D$. h verschwindet auf J , da für alle $x, y \in E$ $h(xey - 2b(x,y)x) = f(x)f(y)f(x) - 2b(x,y)f(x) = 0$ gilt. Wir können nun h über ρ faktorisieren, indem wir für alle $u \in \otimes E$ $f'(\rho(u)) := h(u)$ setzen. f' erfüllt dann offensichtlich (+). ■

Für den Rest der Arbeit betrachten wir mit einer Ausnahme nur noch Paracliffordalgebren über Hilberträumen. Ist E ein reeller Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, so schreiben wir $PC_{\mathbb{R}}(E)$ statt $PC(E, (\cdot, \cdot))$. Ist E ein komplexer Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$, so betrachten wir E als reellen Hilbertraum $E_{\mathbb{R}}$ mit Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}} := \frac{1}{2}((\cdot, \cdot) + \overline{(\cdot, \cdot)})$ und bilden dann $PC_{\mathbb{R}}(E_{\mathbb{R}})$ (oft einfach mit $PC_{\mathbb{R}}(E)$ bezeichnet). Die in jedem Fall reelle Algebra $PC_{\mathbb{R}}(E)$ läßt sich in kanonischer Weise komplexifizieren. Wir bezeichnen die Komplexifizierung von $PC_{\mathbb{R}}(E)$ mit $PC(E)$. Die universelle Eigenschaft von $PC_{\mathbb{R}}(E)$ überträgt sich offensichtlich auf $PC(E)$, indem man f' zu einem $\mathbb{C}$ -Algebrenhomomorphismus fortsetzt.

Mit Hilfe der universellen Eigenschaft von $PC(E)$ können wir auf $PC(E)$ eine Involution $*$ definieren. Betrachtet man $PC(E)$ als Menge und setzt für alle $\alpha \in \mathbb{C}$ und $u, v \in PC(E)$ $\alpha u := \bar{\alpha}u$ und $uv := vu$, so wird $PC(E)$ mit den Verknüpfungen $(+, \cdot, \circ)$ wieder eine Algebra, die wir mit $PC'(E)$ bezeichnen. Die Abbildung $p: E \longrightarrow PC'(E)$ erfüllt die Paracliffordrelation.

$$\begin{aligned}
 p(x) \circ p(y) \circ p(x) &= (p(x) \circ p(y)) \circ p(x) = (p(y)p(x)) \circ p(x) \\
 &= p(x)p(y)p(x) = 2(x,y)p(x)
 \end{aligned}$$

Wegen der universellen Eigenschaft von $PC(E)$ existiert ein Algebrenhomomorphismus $*$ von $PC(E)$ nach $PC'(E)$ mit $p = * \circ \rho$. Betrachtet man $*$ als Abbildung von $PC(E)$ in sich, so ist $*$ eine Involution. Es gilt dann für alle $\alpha \in \mathbb{C}, u, v \in PC(E)$ und $x \in E$:

$$\begin{aligned}
 (u+v)^* &= u^* + v^* \\
 (\alpha u)^* &= \bar{\alpha}u \\
 (uv)^* &= v^*u^* \\
 u^{**} &= u \\
 p(x)^* &= p(x)
 \end{aligned}$$

Bem.: Ist f eine lineare Abbildung von E in die $*$ -Algebra D , die die Paracliffordrelation erfüllt und bei der $f(x) = f(x)^*$ für alle $x \in E$ gilt, so

ist f' sogar ein $\ast$ -Algebrenhomomorphismus. Ist D eine Operatorenalgebra, so ist f' eine $\ast$ -Darstellung von $PC(E)$.

Wir kommen nun zum Hauptsatz dieses Kapitels. Wir benötigen dazu die folgende Definition.

Def.: Sei E ein komplexer Hilbertraum. Wir bezeichnen dann die Multiplikation mit i in $E_{\mathbb{R}}$ mit $\wedge$, d.h.

$$\begin{array}{ccc} \wedge : E_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & E_{\mathbb{R}} \\ x & \longmapsto & ix \end{array} .$$

Theorem 1 Sei E ein komplexer Hilbertraum, dann sind die $\ast$ -Algebren $PF(E)$ und $PC(E_{\mathbb{R}})$ isomorph. Der $\ast$ -Algebrenisomorphismus ψ' von $PF(E)$ auf $PC(E_{\mathbb{R}})$ ist dabei gegeben durch $\psi'(j(x)) = \frac{1}{2}(p(x) - ip(\wedge x))$ und lineare, multiplikative $\ast$ -Fortsetzung. Die Umkehrabbildung von ψ' , d.h. der Isomorphismus von $PC(E_{\mathbb{R}})$ auf $PF(E)$, wird durch $\psi(p(x)) = j(x) + j(x)^{\ast}$ und lineare, multiplikative Fortsetzung realisiert.

Bew.: Die Existenz von ψ' und ψ beruht auf der universellen Eigenschaft von $PF(E)$ und $PC(E_{\mathbb{R}})$. Wir zeigen zuerst die Existenz von ψ' . Zu diesem Zweck definieren wir eine Abbildung φ von $E_{\mathbb{R}}$ nach $PF(E)$ und zeigen, daß sie die Paracliffordrelation erfüllt.

$$\begin{array}{ccc} \varphi : E_{\mathbb{R}} & \longrightarrow & PF(E) \\ x & \longmapsto & j(x) + j(x)^{\ast} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x) &= (j(x) + j(x)^{\ast})(j(y) + j(y)^{\ast})(j(x) + j(x)^{\ast}) \\ &= j(x)j(y)j(x)^{\ast} + j(x)j(y)^{\ast}j(x) + \\ &\quad j(x)j(y)^{\ast}j(x)^{\ast} + j(x)^{\ast}j(y)j(x) + \\ &\quad j(x)^{\ast}j(y)j(x)^{\ast} + j(x)^{\ast}j(y)^{\ast}j(x) \\ &= (y, x)j(x) + (x, y)j(x) + (x, y)j(x)^{\ast} + (y, x)j(x)^{\ast} \\ &= 2(x, y)_{\mathbb{R}}\varphi(x) \end{aligned}$$

Da überdies für alle $x \in E_{\mathbb{R}}$ $\varphi(x) = \varphi(x)^{\ast}$ gilt, impliziert die universelle Eigenschaft von $PC(E_{\mathbb{R}})$ die Existenz eines $\ast$ -Algebrenhomomorphismus ψ' , der folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} E_{\mathbb{R}} & \xrightarrow{p} & PC(E_{\mathbb{R}}) \\ & \searrow \varphi \quad \swarrow \psi' & \\ & PF(E) & \end{array}$$

Dies bedeutet aber, daß für alle $x \in E_{\mathbb{R}}$ gilt:

$$\psi'(p(x)) = \varphi(x) = j(x) + j(x)^{\ast} .$$

Die Existenz von ψ weisen wir vollkommen analog nach. Wir definieren eine Abbildung ψ von E nach $PC(E_{\mathbb{R}})$ und zeigen, daß sie die Parafermirelationen erfüllt. Der Nachweis der Parafermirelationen erfordert allerdings einige etwas langwierige Rechnungen.

$$\begin{array}{ccc} \psi : E & \longrightarrow & PC(E_{\mathbb{R}}) \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(p(x) - ip(\wedge x)) \end{array}$$

ψ ist $\mathbb{C}$ -linear, denn:

$$\begin{aligned}\psi(ix) &= \psi(\wedge x) = \frac{1}{2}(p(\wedge x) - ip(\wedge^2 x)) = \frac{1}{2}(p(\wedge x) + ip(x)) \\ &= i\frac{1}{2}(p(x) - ip(\wedge x)) = i\psi(x)\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt, daß ψ die Parafermirelationen erfüllt.

$$(1) [\psi(x), \psi(y), \psi(z)]_+ = 0$$

$$\begin{aligned}\psi(x)\psi(y)\psi(z) &= \frac{1}{8}(p(x) - ip(\wedge x))(p(y) - ip(\wedge y))(p(z) - ip(\wedge z)) \\ &= \frac{1}{8}(p(x)p(y)p(z) - ip(x)p(y)p(\wedge z) - ip(x)p(\wedge y)p(z) - \\ &\quad p(x)p(\wedge y)p(\wedge z) - ip(\wedge x)p(y)p(z) - p(\wedge x)p(y)p(\wedge z) - \\ &\quad p(\wedge x)p(\wedge y)p(z) + ip(\wedge x)p(\wedge y)p(\wedge z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\psi(x), \psi(y), \psi(z)]_+ &= \frac{1}{8}([p(x), p(y), p(z)]_+ - [p(x), p(\wedge y), p(\wedge z)]_+ - \\ &\quad [p(\wedge x), p(y), p(\wedge z)]_+ - [p(\wedge x), p(\wedge y), p(z)]_+ - \\ &\quad i([p(x), p(y), p(\wedge z)]_+ + [p(x), p(\wedge y), p(z)]_+ + \\ &\quad [p(\wedge x), p(y), p(z)]_+ - [p(\wedge x), p(\wedge y), p(\wedge z)]_+)) \\ &= \frac{1}{4}((x, y)_{\mathbb{R}}p(z) + (z, y)_{\mathbb{R}}p(x) - (x, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(\wedge z) - \\ &\quad (\wedge z, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(x) - (\wedge x, y)_{\mathbb{R}}p(\wedge z) - (\wedge z, y)_{\mathbb{R}}p(\wedge x) - \\ &\quad (\wedge x, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(z) - (z, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(\wedge x) - \\ &\quad i((x, y)_{\mathbb{R}}p(\wedge z) + (\wedge z, y)_{\mathbb{R}}p(x) + (x, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(z) + \\ &\quad (z, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(x) + (\wedge x, y)_{\mathbb{R}}p(z) + (z, y)_{\mathbb{R}}p(\wedge x) - \\ &\quad (\wedge x, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(\wedge z) - (\wedge z, \wedge y)_{\mathbb{R}}p(\wedge x))) \\ &= 0\end{aligned}$$

Beim letzten Schritt beachte man, daß $\wedge$ schiefssymmetrisch ist.

$$(\wedge x, y)_{\mathbb{R}} = \frac{1}{2}((ix, y) + (y, ix)) = -\frac{1}{2}((x, iy) + (iy, x)) = -(x, \wedge y)_{\mathbb{R}}$$

$$(2) [\psi(x), \psi(y), \psi(z)^*]_+ = (y, z)g(x)$$

$$\begin{aligned}\psi(x)\psi(y)\psi(z)^* &= \frac{1}{8}(p(x) - ip(\wedge x))(p(y) - ip(\wedge y))(p(z) + ip(\wedge z)) \\ &= \frac{1}{8}(p(x)p(y)p(z) + ip(x)p(y)p(\wedge z) - ip(x)p(\wedge y)p(z) + \\ &\quad p(x)p(\wedge y)p(\wedge z) - ip(\wedge x)p(y)p(z) + \\ &\quad p(\wedge x)p(y)p(\wedge z) - p(\wedge x)p(\wedge y)p(z) - \\ &\quad ip(\wedge x)p(\wedge y)p(\wedge z))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\psi(x), \psi(y), \psi(z)^*]_+ &= \frac{1}{8}([p(x), p(y), p(z)]_+ + [p(x), p(\wedge y), p(\wedge z)]_+ + \\ &\quad [p(\wedge x), p(y), p(\wedge z)]_+ - [p(\wedge x), p(\wedge y), p(z)]_+ + \\ &\quad i([p(x), p(y), p(\wedge z)]_+ - [p(x), p(\wedge y), p(z)]_+ - \\ &\quad [p(\wedge x), p(y), p(z)]_+ - [p(\wedge x)p(\wedge y)p(\wedge z)]_+))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}((x,y)_{\mathbb{R}}p(z) + (z,y)_{\mathbb{R}}p(x) + (x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) + \\
&\quad (\Lambda z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(x) + (\Lambda x,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) + (\Lambda z,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x) - \\
&\quad (\Lambda x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(z) - (z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x) + \\
&\quad i((x,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) + (\Lambda z,y)_{\mathbb{R}}p(x) - (x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(z) - \\
&\quad (z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(x) - (\Lambda x,y)_{\mathbb{R}}p(z) - (z,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x) - \\
&\quad (\Lambda x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) - (\Lambda z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x))) \\
&= \frac{1}{2}((z,y)_{\mathbb{R}} + i(\Lambda z,y)_{\mathbb{R}})p(x) + ((\Lambda z,y)_{\mathbb{R}} - i(z,y)_{\mathbb{R}})p(\Lambda x)) \\
&= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}((z,y) + (y,z) + i(iz,y) + i(y,iz))p(x) + \\
&\quad \frac{1}{2}((iz,y) + (y,iz) - i(z,y) - i(y,z))p(\Lambda x)) \\
&= (y,z)\Psi(x)
\end{aligned}$$

$$(3) [\psi(x), \psi(y)^*, \psi(z)]_+ = (x,y)g(z) + (z,y)g(x)$$

$$\begin{aligned}
\psi(x)\psi(y)^*\psi(z) &= \frac{1}{8}(p(x)p(y)p(z) - ip(x)p(y)p(\Lambda z) + ip(x)p(\Lambda y)p(z) + \\
&\quad p(x)p(\Lambda y)p(\Lambda z) - ip(\Lambda x)p(y)p(z) - p(\Lambda x)p(y)p(\Lambda z) + \\
&\quad p(\Lambda x)p(\Lambda y)p(z) - ip(\Lambda x)p(\Lambda y)p(\Lambda z))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\psi(x), \psi(y)^*, \psi(z)]_+ &= \frac{1}{8}([p(x), p(y), p(z)]_+ + [p(x), p(\Lambda y), p(\Lambda z)]_+ - \\
&\quad [p(\Lambda x), p(y), p(\Lambda z)]_+ + [p(\Lambda x), p(\Lambda y), p(z)]_+ - \\
&\quad i([p(x), p(y), p(\Lambda z)]_+ - [p(x), p(\Lambda y), p(z)]_+ + \\
&\quad [p(\Lambda x), p(y), p(z)]_+ + [p(\Lambda x), p(\Lambda y), p(\Lambda z)]_+)) \\
&= \frac{1}{4}((x,y)_{\mathbb{R}}p(z) + (z,y)_{\mathbb{R}}p(x) + (x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) + \\
&\quad (\Lambda z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(x) - (\Lambda x,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) - (\Lambda z,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x) + \\
&\quad (\Lambda x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(z) + (z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x) - \\
&\quad i((x,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) + (\Lambda z,y)_{\mathbb{R}}p(x) - (x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(z) - \\
&\quad (z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(x) + (\Lambda x,y)_{\mathbb{R}}p(z) + (z,y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x) + \\
&\quad (\Lambda x,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda z) + (\Lambda z,\Lambda y)_{\mathbb{R}}p(\Lambda x))) \\
&= \frac{1}{2}(((x,y)_{\mathbb{R}} + i(x,\Lambda y)_{\mathbb{R}})p(z) + \\
&\quad ((z,y)_{\mathbb{R}} + i(z,\Lambda y)_{\mathbb{R}})p(x) + \\
&\quad ((x,\Lambda y)_{\mathbb{R}} - i(x,y)_{\mathbb{R}})p(\Lambda z) + \\
&\quad ((z,\Lambda y)_{\mathbb{R}} - i(z,y)_{\mathbb{R}})p(\Lambda x)) \\
&= (x,y)\psi(z) + (z,y)\psi(x)
\end{aligned}$$

Die universelle Eigenschaft von $\text{PF}(E)$ impliziert nun die Existenz eines κ -Algebrenhomomorphismus ψ' mit $\psi'(j(x)) = \psi(x) = \frac{1}{2}(p(x) - ip(\Lambda x))$.

Wir zeigen nun noch, daß ψ' die Umkehrabbildung von ψ ist.

$$\begin{aligned}
 \psi' \circ \psi'(p(x)) &= \psi'(\psi(x) + \psi(x)^*) \\
 &= \frac{1}{2}(p(x) - ip(\wedge x) + p(x) + ip(\wedge x)) = p(x) \\
 \psi' \circ \psi'(\psi(x)) &= \psi'(\frac{1}{2}(p(x) - ip(\wedge x))) \\
 &= \frac{1}{2}(\psi(x) + \psi(x)^* - i\psi(ix) - i\psi(ix)^*) = \psi(x)
 \end{aligned}$$

Da $PF(E)$ von den $\psi(x), x \in E$, und $PC(E_{\mathbb{R}})$ von den $p(x), x \in E$, erzeugt werden, folgt $\psi' = \psi'^{-1}$. ■

Eine erste Anwendung von Theorem 1 stellt der folgende Satz dar.

Satz 3 Sei E ein komplexer Hilbertraum. Jede orthogonale Transformation $U \in L(E_{\mathbb{R}})$ induziert einen Automorphismus B_U von $PF(E)$.

Bew.: Die Abbildung $poU: E_{\mathbb{R}} \longrightarrow PC(E_{\mathbb{R}})$ erfüllt die Paracliffordrelation, so daß die universelle Eigenschaft von $PC(E_{\mathbb{R}})$ einen Automorphismus A_U von $PC(E_{\mathbb{R}})$ mit $A_U op = poU$ induziert. Mit Theorem 1 folgt dann aber sofort, daß $B_U := \psi' \circ A_U \circ \psi'$ ein Automorphismus von $PF(E)$ ist. ■

Als nächstes führen wir in $PC(E)$ eine Spur ein.

Def.: Sei E ein reeller Hilbertraum. Wir definieren dann:

$$S: PC(E) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$S(1) := 1$$

$$S(p(x_1) \dots p(x_{2n-1})) := 0, n \in \mathbb{N}$$

$$S(p(x_1) \dots p(x_{2n})) := \begin{vmatrix} (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_{2n}) \\ -(x_3, x_2) & \dots & (x_3, x_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ -(x_{2n-1}, x_2) & \dots & (x_{2n-1}, x_{2n}) \end{vmatrix}, n \in \mathbb{N}$$

und $\mathbb{C}$ -lineare Fortsetzung

Das Minuszeichen tritt in der Determinante genau dann auf, wenn die Zeilennummer größer als die Spaltennummer ist.

Bem.: S ist wohldefiniert, denn:

- 1) p ist injektiv, da für alle $x \in E \setminus \{0\}$ $\delta(x) \notin J$ gilt.
- 2) Für alle $u, v \in PC(E)$ und $x, y \in E$ gilt:

$$S(up(x)p(y)p(x)v) = 2(x, y)S(up(x)v)$$

Bew.: Wir wählen o.E. $u=1$ und $v=p(z), z \in E$.

$$\begin{aligned}
 S(p(x)p(y)p(x)p(z)) &= \begin{vmatrix} (x, y) & (x, z) \\ -(x, y) & (x, z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2(x, y) & 0 \\ -(x, y) & (x, z) \end{vmatrix} \\
 &= 2(x, y)S(p(x)p(z))
 \end{aligned}$$

Bem.: Aufgrund der Injektivität von p können wir $p(x)$ mit x identifizieren. Wir werden zukünftig auch einfach x statt $p(x)$ schreiben.

In den folgenden drei Lemmata werden wir zeigen, daß S eine Spur ist.

Lemma 1 a) S ist zentral.

b) $S \circ^* = \overline{S}$, d.h. für alle $u \in PC(E)$ gilt $S(u^*) = \overline{S(u)}$.

Bew.: a) Es reicht zu zeigen, daß für alle $x, x_1 \in E$ gilt:

$$\begin{aligned}
 S(xx_1 \dots x_{2n-1}) &= S(x_1 \dots x_{2n-1}x) \\
 S(xx_1 \dots x_{2n-1}) &= \begin{vmatrix} (x, x_1) & (x, x_3) & \dots & (x, x_{2n-1}) \\ -(x_2, x_1) & (x_2, x_3) & \dots & (x_2, x_{2n-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(x_{2n-2}, x_1) & -(x_{2n-2}, x_3) & \dots & (x_{2n-2}, x_{2n-1}) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (x, x_1) & -(x_2, x_1) & \dots & -(x_{2n-2}, x_1) \\ (x, x_3) & (x_2, x_3) & \dots & -(x_{2n-2}, x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x, x_{2n-1}) & (x_2, x_{2n-1}) & \dots & (x_{2n-2}, x_{2n-1}) \end{vmatrix} \\
 &= (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} -(x_2, x_1) & \dots & -(x_{2n-2}, x_1) & (x, x_1) \\ (x_2, x_3) & \dots & -(x_{2n-2}, x_3) & (x, x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x_2, x_{2n-1}) & \dots & (x_{2n-2}, x_{2n-1}) & (x, x_{2n-1}) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (x_2, x_1) & \dots & (x_{2n-2}, x_1) & (x, x_1) \\ -(x_2, x_3) & \dots & (x_{2n-2}, x_3) & (x, x_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(x_2, x_{2n-1}) & \dots & -(x_{2n-2}, x_{2n-1}) & (x, x_{2n-1}) \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} (x_1, x_2) & \dots & (x_1, x_{2n-2}) & (x_1, x) \\ -(x_3, x_2) & \dots & (x_3, x_{2n-2}) & (x_3, x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -(x_{2n-1}, x_2) & \dots & -(x_{2n-1}, x_{2n-2}) & (x_{2n-1}, x) \end{vmatrix} \\
 &= S(x_1 \dots x_{2n-1}x)
 \end{aligned}$$

b) Es reicht zu zeigen, daß für $u = x_1 \dots x_{2n}$ gilt $S(u) = S(u^*)$.

$$A := \begin{pmatrix} (x_1, x_2) & (x_1, x_4) & \dots & (x_1, x_{2n}) \\ -(x_3, x_2) & & \dots & \\ \dots & & \dots & \\ -(x_{2n-1}, x_2) & & \dots & (x_{2n-1}, x_{2n}) \end{pmatrix} \implies S(u) = \det(A)$$

$$J := \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \\ & \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \implies (\det(J))^2 = 1$$

Wir können jetzt $S(u^*)$ durch A^* und J ausdrücken.

$$S(u^*) = S(x_{2n} \dots x_1) = \begin{vmatrix} (x_{2n}, x_{2n-1}) & \dots & (x_{2n}, x_1) \\ -(x_{2n-2}, x_{2n-1}) & \dots & \\ \dots & & \\ -(x_2, x_{2n-1}) & & (x_2, x_1) \end{vmatrix}$$

$$= \det(JA^*J) = (\det(J))^2 \det(A^*) = \det(A) = S(u) \quad \blacksquare$$

Zum Nachweis der Positivdefinitheit von S brauchen wir eine geeignete - sie erweist sich später als Orthonormalbasis - Basis von $PC(E)$.

Lemma 2 Sei E ein n -dimensionaler, reeller Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$. Dann ist

$$B(E) := \{e_{(J_u, J_g, K)} \mid J_u \cup J_g \cup K \subseteq \{1, \dots, n\} \wedge 0 \leq |J_u| - |J_g| \leq 1\}$$

eine Basis von $PC(E)$, wobei $e_{(J_u, J_g, K)}$ folgendermaßen definiert ist:

$$e_{(J_u, J_g, K)} := \overline{\prod_{\substack{1 \leq j-1 \in J_u \\ 1 \leq j \in J_g \\ 1 \leq j < j+2}} e_{i_j}} \overline{\prod_{i_k \in K} (e_{i_k}^2 - 1)} \quad \text{und} \quad e_{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)} := 1$$

Bew.: Zuerst berechnen wir einige Produkte der Vektoren e_i .

$$1) \quad (e_i^2 - 1)e_i = e_i^3 - e_i = 2e_i - e_i = e_i$$

$$2) \quad i \neq j \quad (e_i^2 - 1)e_j = e_i^2 e_j - e_j = 2e_j - e_j e_i^2 - e_j \\ = e_j - e_j e_i^2 = -e_j (e_i^2 - 1)$$

$$3) \quad (e_i^2 - 1)(e_i^2 - 1) = e_i^4 - 2e_i^2 + 1 = 2e_i^2 - 2e_i^2 + 1 = 1$$

$$4) \quad i \neq j \quad (e_i^2 - 1)(e_j^2 - 1) = (e_i^2 - 1)e_j^2 - (e_i^2 - 1) \\ = e_j^2 (e_i^2 - 1) - (e_i^2 - 1) \\ = (e_j^2 - 1)(e_i^2 - 1)$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $e_{(J_u, J_g, K)}$ zeigen wir:

$$(*) \quad S(e_{(J_u^*, J_g^*, K^2)}^{e_{(J_u^1, J_g^1, K^1)}}) = \begin{cases} 1 & J_u^1 = J_u^2 \wedge J_g^1 = J_g^2 \wedge K^1 = K^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir nehmen als erstes $K^1 \neq K^2$ an. Sei $i \in K^1 \setminus K^2 \cup K^2 \setminus K^1$. Wegen Lemma 1b) und Relation 4) können wir o.E. $i \in K^1 \setminus K^2$ und $i \notin K^2$ für alle $i_k \in K^1$ annehmen. i kann dann höchstens noch in $J_u^2 \cup J_g^2$ auftreten. Multipliziert man $e_{(J_u^2, J_g^2, K^2)}^* e_{(J_u^1, J_g^1, K^1)}$ aus, so erhält man Summanden

$$e_{s_1} \dots e_{s_r} e_i^2 \quad \text{und} \quad -e_{s_1} \dots e_{s_r}.$$

Ist r ungerade, so gilt trivialerweise $S(e_{s_1} \dots e_{s_r} e_i^2) = S(e_{s_1} \dots e_{s_r}) = 0$.

Ist r gerade, so erhalten wir

$$S(e_{s_1} \dots e_{s_r} e_i^2) = \begin{vmatrix} (e_{s_1}, e_{s_2}) & \dots & (e_{s_1}, e_{s_r}) \\ \dots & & \dots \\ -(e_{s_{r-1}}, e_{s_2}) & & (e_{s_{r-1}}, e_{s_r}) \\ & (-1) & 1 \end{vmatrix} \quad (1),$$

wobei in der letzten Zeile oder Spalte nur eine 1 steht, da i unter $s_1, \dots, s_r$ höchstens noch einmal auftritt. Entwicklung nach dieser Zeile oder Spalte zeigt, daß auch für gerades r

$$S(e_{s_1} \dots e_{s_r} e_i^2) = S(e_{s_1} \dots e_{s_r})$$

gilt. Wegen der verschiedenen Vorzeichen von $e_{s_1} \dots e_{s_r} e_i^2$ und $e_{s_1} \dots e_{s_r}$ folgt dann

$$S(e_{(J_u^2, J_g^2, K^2)}^* e_{(J_u^1, J_g^1, K^1)}) = 0$$

Sei im folgenden also $K^1 = K^2$. Aufgrund der Relationen 1)-4) können wir dann o.E. $K^1 = K^2 = \emptyset$ annehmen. Wir erhalten dann:

$$e_{(J_u^1, J_g^1, K^1)} = e_{i_1} \dots e_{i_r} \quad i_l < i_{l+1}$$

$$e_{(J_u^2, J_g^2, K^2)} = e_{j_1} \dots e_{j_s} \quad j_k < j_{k+1}$$

Weiterhin können wir o.E. $r+s$ gerade annehmen. Wir beweisen hier nur den Fall: r gerade und s gerade.

$$S(e_{(J_u^2, J_g^2, K^2)}^* e_{(J_u^1, J_g^1, K^1)}) = S(e_{j_s} \dots e_{j_1} e_{i_1} \dots e_{i_r})$$

$$= \begin{vmatrix} (e_{j_s}, e_{j_{s-1}}) & \dots & (e_{j_s}, e_{j_1}) & (e_{j_s}, e_{i_2}) & \dots & (e_{j_s}, e_{i_r}) \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ -(e_{j_2}, e_{j_{s-1}}) & \dots & (e_{j_2}, e_{j_1}) & (e_{j_2}, e_{i_2}) & \dots & (e_{j_2}, e_{i_r}) \\ -(e_{i_1}, e_{j_{s-1}}) & \dots & -(e_{i_1}, e_{j_1}) & (e_{i_1}, e_{i_2}) & \dots & (e_{i_1}, e_{i_r}) \\ \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ -(e_{i_{r-1}}, e_{j_{s-1}}) & \dots & -(e_{i_{r-1}}, e_{j_1}) & -(e_{i_{r-1}}, e_{i_2}) & \dots & (e_{i_{r-1}}, e_{i_r}) \end{vmatrix}$$

Ist aber $J_u^1 \neq J_u^2$ oder $J_g^1 \neq J_g^2$, so verschwindet die Determinante.

Ist nämlich $i \in J_g^1 \setminus J_g^2$, so ist die Spalte mit dem Index i identisch 0. Ist $i \in J_g^2 \setminus J_g^1$, so ist die Zeile mit dem Index i identisch 0.

Genauso so sieht man, daß eine Zeile oder Spalte identisch 0 wird, falls $J_u^1 + J_u^2$ ist.

Wir erhalten somit $S(e_{(J_u^2, J_g^2, K^2)}^* e_{(J_u^1, J_g^1, K^1)}) = 0$, falls

$J_u^1 + J_u^2$ oder $J_g^1 + J_g^2$ ist.

Den zweiten Fall - r ungerade und s ungerade - beweist man vollkommen analog.

Sei jetzt $K^1 = K^2, J_u^1 = J_u^2$ und $J_g^1 = J_g^2$.

$$S(e_{(J_u, J_g, K)}^* e_{(J_u, J_g, K)})_{2) - 4} = S(e_{(J_u, J_g, \emptyset)}^* e_{(J_u, J_g, \emptyset)})$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{|J_g|} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{|J_u|}$

Hiermit ist die Behauptung (*) gezeigt. Aus (*) folgt aber sofort die lineare Unabhängigkeit der Elemente von $B(E)$. Sei nun

$$0 = \sum_{i=1}^r a_i u_i \quad \text{mit} \quad u_i \in B(E), \quad u_i \neq u_j \text{ für } i \neq j, \quad a_i \in \mathbb{C}.$$

Multipliziert man obige Gleichung mit $(\sum_{i=1}^r a_i u_i)^*$, so erhält man

$$0 = \sum_{i,j=1}^r \bar{a}_i a_j u_i^* u_j. \text{ Wendet man hierauf } S \text{ an, so folgt } 0 = \sum_{i=1}^r |a_i|^2$$

aufgrund der Aussage (*). Es muß also $a_i = 0$ für $i=1, \dots, r$ gelten. Dies bedeutet aber gerade die lineare Unabhängigkeit der Elemente von $B(E)$.

Als letztes ist noch zu zeigen, daß $B(E)$ ein Erzeugendensystem ist.

Sei $u \in PC(E)$. Dann besitzt u die folgende Darstellung:

$$u = \sum_{i=1}^r a_i e_{i_1} \dots e_{i_{n_1}}$$

Aufgrund der Paracliffordrelation können wir o.E. annehmen, daß in jedem Summanden ein gleicher Index höchstens zweimal auftaucht.

Mit Hilfe dieser Vertauschungsrelation können wir dann die Faktoren in den einzelnen Summanden in die $B(E)$ entsprechende Reihenfolge bringen. Ersetzen wir dann noch jeweils $e_{i_j}^2$ durch $(e_{i_j}^2 - 1) + 1$, so haben wir u als Linearkombination von Elementen aus $B(E)$ ausgedrückt, d.h. aber: $B(E)$ ist Erzeugendensystem. ■

Eine unmittelbare Konsequenz aus Lemma 2 ist die Positivdefinitheit von S.

Lemma 3 S ist positivdefinit.

Bew.: Sei $u \in PC(E)$. Da bei der Darstellung von u durch Vektoren aus E nur endliche Summen und Produkte auftreten, können wir u als Element von $PC(F)$ auffassen, wobei F ein endlichdimensionaler Unterraum von E ist.

$$\text{Sei nun} \quad u = \sum_{i=1}^r a_i u_i \quad \text{mit} \quad u_i \in B(F) \quad .$$

Im Beweis von Lemma 2 haben wir gesehen, daß $S(u^*u) = \sum_{i=1}^r |a_i|^2$ gilt. Dies bedeutet aber, daß für alle $u \in PC(E)$ $S(u^*u) \geq 0$ ist und daß $S(u^*u) = 0$ gleichbedeutend mit $u = 0$ ist. Somit ist die Spur S positivdefinit. ■

Mit Hilfe der positivdefiniten Spur S können wir nun in kanonischer Weise ein Skalarprodukt auf $PC(E)$ definieren.

$$\begin{aligned} \text{Def.:} \quad & (\cdot, \cdot) : PC(E) \times PC(E) \longrightarrow \mathbb{C} \\ & (u, v) := S(v^*u) \end{aligned}$$

Für die von dem Skalarprodukt induzierte Norm werden wir $\| \cdot \|_2$ schreiben.

Bem.: Aus dem Beweis von Lemma 2 geht unmittelbar hervor, daß $B(E)$ eine Orthonormalbasis von $PC(E)$ bezüglich des oben definierten Skalarproduktes ist.

Als nächstes wollen wir zeigen, daß $PC(E)$ eine Hilbertalgebra ist. Zu diesem Zweck müssen wir die Stetigkeit der Linksmultiplikation in $PC(E)$ nachweisen.

$$\begin{aligned} \text{Def.:} \quad & \text{Sei } u \in PC(E). \\ & L_u : PC(E) \longrightarrow PC(E) \\ & v \longmapsto uv \end{aligned}$$

Lemma 4 Ist $x \in E$, so gilt $\|L_x\| = \sqrt{2} \|x\|$.

Bew.: Wir nehmen o.E. $\|x\| = 1$ an. Sei jetzt $v \in PC(E)$. Wir fassen v dann als Vektor aus $PC(F)$ auf, wobei F ein n -dimensionaler Unterraum von E mit Orthonormalbasis $\{e_i \mid i=1, \dots, n, e_1=x\}$ ist. Die Indexmenge $I := \{1, \dots, n\}$ zerlegen wir jetzt in vier paarweise disjunkte Mengen.

$$v = \sum_{i=1}^r a_i e_{(j_u^i, j_g^i, k^i)}$$

$$I_1 := \{i \in I \mid 1 \in j_u^i\}, \quad I_2 := \{i \in I \mid 1 \in j_g^i\}, \quad I_3 := \{i \in I \mid 1 \in k^i\},$$

$$I_4 := I \setminus (I_1 \cup I_2 \cup I_3)$$

Wir berechnen nun, wie L_x auf die $e_{(j_u^i, j_g^i, k^i)}$ wirkt.

$$1) \quad i \in I_1 \quad L_x e_{(j_u^i, j_g^i, k^i)} = e_1 e_1 \dots e_{\overline{1_k \in K}} (e_{1_k}^2 - 1)$$

$$\begin{aligned}
&= (e_1^2 - 1) e_{i_2} \dots e_{i_r} \prod_{i_k \in K^1} (e_{i_k}^2 - 1) + \\
&\quad e_{i_2} \dots e_{i_r} \prod_{i_k \in K^1} (e_{i_k}^2 - 1) \\
&= (-1)^{r-1} e_{(J_G^1, J_U^1 \setminus \{1\}, K^1 \cup \{1\})} + \\
&\quad e_{(J_G^1, J_U^1 \setminus \{1\}, K^1)}
\end{aligned}$$

$$2) \quad i \in I_2 \quad L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} = \underbrace{e_1 e_{i_1} e_1 \dots e_{i_r}}_{=0} \prod_{i_k \in K^1} (e_{i_k}^2 - 1) = 0$$

$$\begin{aligned}
3) \quad i \in I_3 \quad L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} &= e_1 e_{i_1} \dots e_{i_r} (e_1^2 - 1) \prod_{i_k \in K^1 \setminus \{1\}} (e_{i_k}^2 - 1) \\
&= (-1)^r e_{(J_G^1 \cup \{1\}, J_U^1, K^1 \setminus \{1\})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
4) \quad i \in I_4 \quad L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} &= e_1 e_{i_1} \dots e_{i_r} \prod_{i_k \in K^1} (e_{i_k}^2 - 1) \\
&= e_{(J_G^1 \cup \{1\}, J_U^1, K^1)}
\end{aligned}$$

Die Relationen 1)-4) benutzen wir zur Berechnung von $\|L_x v\|$.

$$\begin{aligned}
\|L_x v\|_2^2 &= \left(\sum_{i \in I} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) \\
&= \left(\sum_{i \in I \setminus I_2} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I \setminus I_2} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) \\
&\quad 2) \quad \left(\sum_{i \in I_1} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I_1} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) + \\
&\quad 1), 3), 4) \quad \left(\sum_{i \in I_3} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I_3} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) + \\
&\quad \left(\sum_{i \in I_4} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I_4} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) + \\
&\quad \left(\sum_{i \in I_3} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I_4} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) + \\
&\quad \left(\sum_{i \in I_4} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I_3} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right) \\
&= 2 \sum_{i \in I_1} |a_i|^2 + \sum_{i \in I_3} |a_i|^2 + \sum_{i \in I_4} |a_i|^2 + \\
&\quad 2 \operatorname{Re} \left(\sum_{i \in I_3} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, \sum_{i \in I_4} a_i L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)} \right)
\end{aligned}$$

Den letzten Summanden müssen wir weiter abschätzen. Wir beachten, dazu, daß es zu jedem $i \in I_3$ höchstens ein $j(i) \in I_4$ mit

$$(*) \quad (L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}, L_x e_{(J_U^1, J_G^1, K^1)}) \neq 0$$

gibt. Setzt man für alle $i \in I_3$

$$b_1 := 0, \quad \text{falls kein } j(i) \in I_4 \text{ mit Eigenschaft } (*) \text{ existiert}$$

bzw. $b_1 := a_{j(i)}$, falls ein $j(i) \in I_4$ mit Eigenschaft (*) existiert, so erhält man:

$$\begin{aligned} 2 \left| \left(\sum_{i \in I_3} a_i L_{x^e}(J_{u,i}^1, J_{g,i}^1, K^1), \sum_{i \in I_4} a_i L_{x^e}(J_{u,i}^1, J_{g,i}^1, K^1) \right) \right| &\leq 2 \sum_{i \in I_3} |a_i| |b_i| \\ &\leq \sum_{i \in I_3} (|a_i|^2 + |b_i|^2) \leq \sum_{i \in I_3 \cup I_4} |a_i|^2 \quad \text{und damit} \\ \|L_{x^e} v\|_2^2 &\leq 2 \sum_{i \in I \setminus I_2} |a_i|^2 \leq 2 \sum_{i \in I} |a_i|^2 = 2 \|v\|^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung ist jetzt klar, wenn man noch bedenkt, daß z.B.

$$\|L_{x^e} x\|_2 = \|x\|_2 = \sqrt{2} \quad \text{gilt.} \quad \blacksquare$$

Bem.: Die letzte Gleichung in obigem Beweis zeigt auch, daß die $\|\cdot\|_2$ -Norm nicht submultiplikativ ist.

Wir sind nun in der Lage zu zeigen, daß $PC(E)$ eine Hilbertalgebra ist.

Satz 4 $PC(E)$ ist eine Hilbertalgebra mit Einselement.

Bew.: Seien $u, v, w \in PC(E)$.

- 1) $(v^*, u^*) = S(u^* v^*) = S(uv^*) = S(v^* u) = (u, v)$
- 2) $(uv, w) = S(w^* uv) = S((u^* w)^* v) = (v, u^* w)$
- 3) Die Operatoren $L_u, u \in PC(E)$, sind beschränkt, wie man sofort aus Lemma 4 ersieht. ■

Korollar 1 $PC(E)$ ist halbeinfach.

Bew.: $PC_2(E)$ bezeichne die Vervollständigung von $PC(E)$ in der $\|\cdot\|_2$ -Norm. Die Operatoren $L_u, u \in PC(E)$, lassen sich dann stetig auf $PC_2(E)$ fortsetzen. Die Abbildung L ist dann eine treue Darstellung von $PC(E)$ über $PC_2(E)$. $PC(E)$ ist somit $*$ -isomorph zu der $*$ -Algebra linearer Operatoren $L(PC(E))$. $*$ -Algebren linearer Operatoren sind aber nach einem Satz von Rickart/Segal halbeinfach. ■

Wir interessieren uns ja für Darstellungen von $PC(E)$. Das Darstellungsproblem ist aber nur für vollständige Hilbertalgebren gelöst. Lemma 5 wird uns zeigen, daß $PC(E)$ für endlichdimensionales E vollständig ist. Aus Lemma 6 können wir entnehmen, daß $PC_2(E)$ für $\dim E = \infty$ keine Algebra mehr ist.

Lemma 5 Sei E ein n -dimensionaler, reeller Hilbertraum. Dann ist $PC(E)$ $\binom{2n+1}{n}$ -dimensional.

Bew.: Sei $\{e_i \mid i \in I := \{1, \dots, n\}\}$ eine Orthonormalbasis von E .

Seien $I_u, I_g \subseteq I$ mit $0 \leq |I_u| - |I_g| = 1$. Wir setzen dann:

$$e(I_u, I_g) := \left| \begin{array}{cccc} & & & \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array} \right| e_{i_j}$$

$i_{2j-1} \in I_u, i_{2j} \in I_g, i_j < i_{j+2}$

$$EZ(E) := \{e(I_u, I_g) \mid I_u, I_g \subseteq I, 0 = |I_u| - |I_g| \leq 1\}$$

Wir zeigen nun: $|B(E)| = |EZ(E)|$.

$$f(e_{(J_u, J_g, K)}) := e(J_u \dot{\cup} K, J_g \dot{\cup} K)$$

$$g(e_{(I_u, I_g)}) := e_{(I_u \setminus I_g, I_g \setminus I_u, I_u \cap I_g)}$$

Man sieht dann sofort $g \circ f^{-1}$, d.h. aber, daß f Bijektion von $B(E)$ auf $EZ(E)$ ist. Die Elementezahl von $EZ(E)$ läßt sich leicht bestimmen.

$$|EZ(E)| = \sum_{k=0}^{2n} \binom{n}{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} \binom{n}{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} = \binom{2n+1}{n}$$

Aufgrund der Paracliffordrelation ergibt sich übrigens, daß $EZ(E)$ ein Erzeugendensystem und folglich sogar eine Basis von $PC(E)$ ist. ■

Lemma 6 Ist E ein unendlichdimensionaler Hilbertraum, so ist die Multiplikation in $PC(E)$ als bilineare Abbildung unstetig.

Bew.: Sei $\{e_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E . Für alle $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $u_n := e_1 \dots e_n$.

Wie wir in Lemma 2 gesehen haben gilt $\|u_n\|_2 = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen nun durch Induktion, daß

$$u_n^* u_n = \sum_{I \in I_n} (-1)^{s_n(I)} \prod_{i \in I} (e_i^2 - 1)$$

ist, wobei $I_n := \{1, \dots, n\}$ und $s_n(I) := \sum_{i \in I} (n-i)$ ($s(\emptyset) := 0$) ist.

Der Induktionsanfang $n=1$ ist trivial.

$$\begin{aligned} u_{n+1}^* u_{n+1} &= e_{n+1}^* u_n^* u_n e_{n+1} \\ &= e_{n+1}^* \left(\sum_{I \in I_n} (-1)^{s_n(I)} \prod_{i \in I} (e_i^2 - 1) \right) e_{n+1} \\ &= (e_{n+1}^2 - 1) \sum_{I \in I_n} (-1)^{s_n(I) + |I|} \prod_{i \in I} (e_i^2 - 1) + \\ &\quad \sum_{I \in I_n} (-1)^{s_n(I) + |I|} \prod_{i \in I} (e_i^2 - 1) \\ &= \sum_{I \in I_{n+1}} (-1)^{s_{n+1}(I)} \prod_{i \in I} (e_i^2 - 1) \end{aligned}$$

Die Richtigkeit des letzten Gleichheitszeichens beruht hierbei auf der Gleichung $s_n(I) + |I| = s_{n+1}(I \cup \{n+1\}) = s_{n+1}(I)$.

Das Produkt $u_n^* u_n$ besteht also aus 2^n orthonormalen Summanden. Folglich gilt:

$$\|u_n^* u_n\|_2 = 2^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \|u_n^*\|_2 \|u_n\|_2 \quad \blacksquare$$

Wir zeigen nun, wie man auf $PC(E)$ eine submultiplikative Norm definieren kann, die überdies die C^* -Bedingung erfüllt.

Def.: Sei $u \in PC(E)$. Wir definieren dann: $\|u\|_\infty := \|L_u\|$

Lemma 7 $\|\cdot\|_\infty$ ist eine submultiplikative Norm auf $PC(E)$, die die C^* -Bedingung erfüllt.

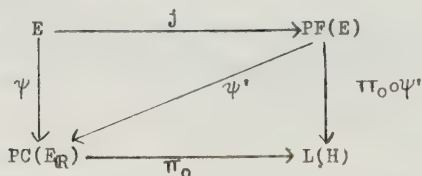
Bew.: Die Normeigenschaften und die Submultiplikativität sind trivial. Die Gültigkeit der C^* -Bedingung beruht auf der Identität $L_{u^*} = L_u^*$, die wiederum eine unmittelbare Folge der Gleichung $(uv, w) = (v, u^*w)$ ist. ■

Satz 5 Die Vervollständigung $PC_\infty(E)$ von $PC(E)$ in der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm ist eine C^* -Algebra mit Einselement.

Theorem 1 erlaubt es uns nun, Darstellungen der Parafermialgebra $PF(E)$ aus Darstellungen der C^* -Algebra $PC_\infty(E_R)$ zu gewinnen.

Satz 6 Sei E ein komplexer Hilbertraum und π eine $*$ -Darstellung von $PC_\infty(E_R)$. Setzen wir $\pi_0 := \pi|_{PC(E_R)}$, so ist $\pi_0 \circ g'$ eine $*$ -Darstellung von $PF(E)$.

Bew.: Die Behauptung ergibt sich aus der Kommutativität des folgenden Diagramms.



Zum Abschluß dieses Kapitels zeigen wir noch einen weiteren Zusammenhang zwischen Parafermialgebren und Paracliffordalgebren auf. Ausgehend von der Fockdarstellung der Parafermialgebra $PF(E)$ konstruieren wir eine von Neumannalgebra $\tilde{F}$, die schwacher Abschluß einer Paracliffordalgebra ist. Wir beweisen dann, daß der Hilbertraum $\hat{F}_0(E)$ isomorph zu dem nichtkommutativen $L^2(\tilde{F}, \tau)$ ist. $L^2(\tilde{F}, \tau)$ verfügt gegenüber $\hat{F}_0(E)$ über eine natürliche Ordnungsstruktur (Positivität), was die Untersuchung des Spektrums erleichtert. Die folgenden Überlegungen verlaufen vollkommen parallel zu der Arbeit von Gross, der die gleiche Aussage für den Fermifall bewiesen hat.

Wir geben zuerst einige einfache Eigenschaften von Konjugationen an.

Lemma 8 Sei E ein komplexer Hilbertraum mit Konjugation J . Ein Vektor $x \in E$ heiße J -reell, falls $Jx = x$ gilt. Dann gilt:

- Jedes $x \in E$ läßt sich als Linearkombination von höchstens zwei J -reellen Vektoren schreiben.
- Sind x, y J -reell, so ist $(x, y) \in \mathbb{R}$.
- Setzt man $\langle x, y \rangle := (x, Jy)$, so ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine symmetrische Bilinearform.

Bew.: a) Setzen wir $\operatorname{Re}(x) := x + Jx$ und $\operatorname{Im}(x) := i(x - Jx)$, so sind $\operatorname{Re}(x)$ und

$\text{Im}(x)$ J-reell. Jedes $x \in E$ besitzt dann die Darstellung

$$x = \frac{1}{2}(\text{Re}(x) - i\text{Im}(x)).$$

b) Sind x und y J-reell, so gilt $(x, y) = (Jx, Jy) = (y, x) = \overline{(x, y)}$.

c) Man verifiziert die Behauptung durch einfaches Nachrechnen. ■

Wir kommen nun zur Definition der von Neumannalgebra $\mathcal{L}$.

Def.: Sei E ein komplexer Hilbertraum mit Konjugation J . Wir definieren dann für alle $x \in E$:

$$\begin{aligned} B_x : \hat{F}_0(E) &\longrightarrow \hat{F}_0(E) \\ u &\longmapsto C_x u + C_{Jx}^* u \end{aligned} \quad .$$

$\mathcal{L}_x$ bezeichne die von I und den Operatoren $B_x, x \in E$, erzeugte von Neumannalgebra.

Wir zeigen nun, daß die Operatoren B_x die Paraciffordrelation bezüglich $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ erfüllen. Zum Schluß des Kapitels werden wir dann noch nachweisen, daß die von I und den $B_x, x \in E$, erzeugte Algebra isomorph zu $PC(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ist.

Satz 6 Für alle $x, y \in E$ gilt: $B_x B_y B_x = 2\langle x, y \rangle B_x$.

Bew.: Der Beweis erfolgt durch einfaches Nachrechnen unter Berücksichtigung der Parafermirelationen.

$$\begin{aligned} B_x B_y B_x &= C_x C_y C_x + C_x C_y C_{Jx}^* + C_x C_{Jy}^* C_x + C_x C_{Jy}^* C_{Jx}^* + C_{Jx}^* C_y C_x + C_{Jx}^* C_y C_{Jx}^* + \\ &\quad C_{Jx}^* C_{Jy}^* C_x + C_{Jx}^* C_{Jy}^* C_{Jx}^* \\ &= [C_x, C_y, C_{Jx}^*] + [C_{Jx}^*, C_{Jy}^*, C_x] + C_x C_{Jy}^* C_x + C_{Jx}^* C_y C_{Jx}^* \\ &= (y, Jx) C_x + (x, Jy) C_{Jx}^* + (x, Jy) C_x + (y, Jx) C_{Jx}^* \\ &= 2\langle x, y \rangle B_x \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Als nächstes definieren wir auf $\mathcal{L}$ eine Spur.

Def.: Sei $\mathcal{L}$ die von I und den $B_x, x \in E$, erzeugte von Neumannalgebra. Wir definieren dann:

$$\begin{aligned} \tau : \mathcal{L} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ u &\longmapsto (u \Omega, \Omega) \end{aligned} \quad .$$

Die beiden folgenden Lemmata benötigen wir zum Nachweis der Zentralität von τ .

Lemma 9 Seien $x_1, \dots, x_r \in E$. Dann gilt:

$$(*) \quad (B_{x_1} \dots B_{x_r} \Omega, \Omega) = \begin{cases} \begin{vmatrix} \langle x_1, x_2 \rangle & \langle x_1, x_4 \rangle & \dots & \langle x_1, x_r \rangle \\ -\langle x_3, x_2 \rangle & & & \\ \dots & & & \\ -\langle x_{r-1}, x_2 \rangle & & & \langle x_{r-1}, x_r \rangle \end{vmatrix}, & \text{falls } r \text{ gerade} \\ 0, & \text{falls } r \text{ ungerade} \end{cases}$$

Das Minuszeichen tritt in der Determinante genau dann auf, wenn der Zeilenindex größer als der Spaltenindex ist.

Bew.: 1) r ungerade

Die skalare Komponente von $B_{x_1} \dots B_{x_r} \Omega$ verschwindet, da jeweils $B_{x_i}(F_{0_n}(K)) \subseteq F_{0_{n+1}}(E) + F_{0_{n-1}}(E)$ gilt.

2) r gerade

Da sowohl linke als auch rechte Seite von $(*)$ linear von $x_1, \dots, x_r$ abhängen, können wir die $x_1, \dots, x_r$ o.E. J -reell annehmen. Durch Orthonormierung der $x_1, \dots, x_r$ und Berücksichtigung der Vertauschungsrelation für die Operatoren B_x können wir erreichen, daß wir nur Ausdrücke der Gestalt

$$(B_{x_{j_1}} \dots B_{x_{i_{2n}}} \Omega, \Omega), (x_{i_j}, x_{i_k}) = \delta_{ij} \delta_{ik}, \quad i_j < i_{j+2},$$

betrachten müssen. Wir beweisen die Aussage $(*)$ nun durch Induktion nach n .

$$\begin{aligned} n=1 \quad (B_{x_{i_1}} B_{x_{i_2}} \Omega, \Omega) &= (x_{i_1} x_{i_2} + \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle \Omega, \Omega) \\ &= \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle \end{aligned}$$

$$n \rightarrow n+1 \quad a) \quad i_{2n+1} = i_{2n+2}$$

Die Bedingung $i_{2n+1} = i_{2n+2}$ impliziert $i_j \neq i_{2n+1}$ und damit $(x_{i_j}, x_{i_{2n+1}}) = 0$ für $j=1, \dots, 2n$.

$$\begin{aligned} \text{Da die } x_{i_j} \text{ } J\text{-reell sind gilt } (x_{i_j}, x_{i_k}) &= \langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle. \\ B_{x_{i_1}} \dots B_{x_{i_{2n+2}}} \Omega &= B_{x_{i_1}} \dots B_{x_{i_{2n}}} (x_{i_{2n+1}}^2 + \Omega) \end{aligned}$$

Aufgrund obiger Überlegungen ist aber klar, daß die skalare Komponente von $B_{x_{i_1}} \dots B_{x_{i_{2n}}} x_{i_{2n+1}}^2$ verschwindet, d.h. aber gerade:

$$(B_{x_{i_1}} \dots B_{x_{i_{2n+2}}} \Omega, \Omega) = (B_{x_{i_1}} \dots B_{x_{i_{2n}}} \Omega, \Omega).$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle & \dots & \langle x_{i_1}, x_{i_{2n}} \rangle \\ \dots & & \\ -\langle x_{i_{2n-1}}, x_{i_2} \rangle & & \langle x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}} \rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle & \dots & \langle x_{i_1}, x_{i_{2n}} \rangle & 0 \\ \dots & & & 0 \\ -\langle x_{i_{2n-1}}, x_{i_2} \rangle & & \langle x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}} \rangle \\ 0 & 0 & & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \begin{vmatrix} \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle & \dots & \langle x_{i_1}, x_{i_{2n}} \rangle & \langle x_{i_1}, x_{i_{2n+2}} \rangle \\ \dots & & & \\ -\langle x_{i_{2n+1}}, x_{i_2} \rangle & & \langle x_{i_{2n+1}}, x_{i_{2n}} \rangle & \langle x_{i_{2n+1}}, x_{i_{2n+2}} \rangle \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$b) \quad i_{2n+1} \neq i_{2n+2}$$

ba) Es existiert ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $i_{2n+1} = i_{2k}$.
 Dies impliziert $i_{2n+2} > i_{2j-1}$ für $j=1, \dots, n$.
 Die letzte Spalte in der Determinante ist
 identisch 0, und die skalare Komponente von
 $B_{x_1} \dots B_{x_{i_{2n+2}}} \Omega$ ist 0.

$$bb) \quad i_{2n+1} \neq i_{2k} \quad \text{für } k=1, \dots, n+1$$

Die letzte Zeile in der Determinante ist
 identisch 0, und die skalare Komponente von
 $B_{x_1} \dots B_{x_{i_{2n+2}}} \Omega$ ist 0. ■

Lemma 10 Seien $x, x_1, \dots, x_r \in E$. Dann gilt:

$$(B_x B_{x_1} \dots B_{x_r} \Omega, \Omega) = (B_{x_1} \dots B_{x_r} B_x \Omega, \Omega)$$

Bew.: Die Aussage folgt sofort aus Lemma 1a), wenn man bedenkt, daß für
 J -reelle x_1 gilt:

$$(B_{x_1} \dots B_{x_n} \Omega, \Omega) = S(x_1 \dots x_n) \quad \blacksquare$$

Theorem 2 Sei E ein separabler komplexer Hilbertraum mit Konjugation J .
 Dann ist τ eine reguläre Spur auf $\mathcal{B}$. Die Abbildung $\mathcal{B} \ni B \longmapsto B\Omega$
 läßt sich zu einem unitären Operator D von $L^2(\mathcal{B}, \tau)$ auf $\widehat{Fo}(E)$
 ausdehnen.

Bew.: Wir zeigen als erstes, daß τ eine endliche Spur auf $\mathcal{B}$ ist.

τ ist ein lineares Funktional auf $\mathcal{B}$.

Sei $B \in \mathcal{B}$ und $B \geq 0$. Dann existiert ein $C \in \mathcal{B}$ mit $C^*C = B$. Für dieses
 B erhält man nun $\tau(B) = \tau(C^*C) = \|C\Omega\|^2 \geq 0$, was die Positivi-
 tät von τ impliziert. Die Gleichung $\tau(I) = (\Omega, \Omega) = 1$ zeigt wei-
 ter, daß τ auch endlich ist.

Wir müssen nun noch beweisen, daß τ zentral ist.

Sei $\mathcal{B}_0$ die von den $B_x, x \in E$, und I erzeugte Algebra. Wegen $B_x^* = B_{Jx}$
 ist $\mathcal{B}_0$ eine $*$ -Algebra, so daß $\mathcal{B}$ der schwache Abschluß von $\mathcal{B}_0$
 ist. Aufgrund von Lemma 10 gilt für alle $A, B \in \mathcal{B}_0$:

$$(*) \quad \tau(AB) = \tau(BA)$$

Die nachfolgenden Identitäten zeigen, daß beide Seiten von $(*)$
 in der schwachen Operator-topologie stetig von B abhängen, so daß
 man die Gleichung $(*)$ auf alle $B \in \mathcal{B}$ und alle $A \in \mathcal{B}_0$ ausdehnen
 kann.

$$\tau(AB) = (AB\Omega, \Omega) = (B\Omega, A^*\Omega)$$

$$\tau(BA) = (BA\Omega, \Omega) = (A\Omega, B^*\Omega)$$

Diese Identitäten zeigen aber auch, daß beide Seiten von $(*)$
 stetig von A abhängen, so daß man schließlich $(*)$ für alle
 $A, B \in \mathcal{B}$ erhält. Dies bedeutet aber gerade die Zentralität von τ .
 Wir weisen nun nach, daß $\mathcal{B}_0\Omega$ in $Fo(E)$ dicht liegt.

Aus Lemma 8a), b) schließt man leicht, daß E eine J -reelle Orthonormalbasis $\{e_i | i \in I\}$ besitzt. Aus Kap. I, Satz 5 entnimmt man dann, daß

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{e_{ij}} \\ \substack{1 \leq j-1 \leq J_u \\ 1 \leq j \leq J_g \\ 1 \leq j < j+1} \end{array} \overline{e_{ik}} \right\}_{\substack{1 \leq k \in K \\ 1 \leq k < k+1}} \quad \left| \begin{array}{l} J_u \cup J_g \cup K \subseteq I, 0 \leq |J_u| - |J_g| \leq 1, \\ |J_u| + |J_g| + |K| < \infty \end{array} \right. \quad \left\{ e_{ik}^2 \right\}$$

eine Orthogonalbasis von $\hat{F}_0(E)$ ist.

Ist x J -reell, so ist $(B_x^2 - I)\Omega = C_x^2 \Omega + C_x^* C_x \Omega - \Omega = x^2 \Omega$. Hieraus folgt

$$\overline{e_{ij}}_{1 \leq j \in J} B_{e_{ij}} \overline{e_{ik}}_{1 \leq k \in K} (B_{e_{ik}}^2 - I)\Omega = \overline{e_{ij}}_{1 \leq j \in J} \overline{e_{ik}}_{1 \leq k \in K} e_{ik}^2 \Omega.$$

Wir haben hierbei $J := J_u \cup J_g$ gesetzt.

$\mathcal{L}_0 \Omega$ liegt also dicht in $\hat{F}_0(E)$. Hieraus folgt sofort die Injektivität der Abbildung $B: \mathcal{L}_0 \rightarrow B\mathcal{L}_0$. Sei $A \in \mathcal{L}_0$ und $A\Omega = 0$. Dann gilt für alle $B \in \mathcal{L}_0$:

$$\begin{aligned} \|AB\Omega\|^2 &= (B^* A^* A B \Omega, \Omega) = \tau(B^* A^* A B) = \tau(B B^* A^* A) \\ &= (B B^* A^* A \Omega, \Omega) = 0 \end{aligned}$$

Da $\mathcal{L}_0 \Omega$ dicht liegt und A stetig ist, muß $A = 0$ gelten.

Die Injektivität der Abbildung $B: \mathcal{L}_0 \rightarrow B\mathcal{L}_0$ impliziert die Regularität von τ . Die Regularität von τ gestattet nun die Konstruktion von $L^2(\mathcal{L}, \tau)$. Man sieht nun, daß die Abbildung $B: \mathcal{L}_0 \rightarrow B\mathcal{L}_0$ eine Isometrie von $\mathcal{L}_0$ in $\hat{F}_0(E)$ ist.

$$\|B\Omega\|^2 = \tau(B^* B) = \|B\|_2^2$$

Da $\mathcal{L}_0$ in $L^2(\mathcal{L}, \tau)$ und $\mathcal{L}_0 \Omega$ in $\hat{F}_0(E)$ dicht ist, läßt sich die Abbildung $B: \mathcal{L}_0 \rightarrow B\mathcal{L}_0$ eindeutig zu einem unitären Operator D von $L^2(\mathcal{L}, \tau)$ auf $\hat{F}_0(E)$ fortsetzen. ■

Satz 7 Die von I und den $B_x, x \in E$, erzeugte Algebra $\mathcal{L}_0$ ist isomorph zu $PC(E, <, >)$.

Bew.: Die lineare Abbildung $\gamma: x \mapsto B_x$ erfüllt die Paracliffordrelation. Die universelle Eigenschaft von $PC(E, <, >)$ impliziert dann die Existenz eines Algebrenhomomorphismus γ' , der folgendes Diagramm kommutativ macht.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\quad p \quad} & PC(E, <, >) \\ & \searrow \gamma & \swarrow \gamma' \\ & \mathcal{L}_0 & \end{array}$$

Die Surjektivität von γ' ist klar, da $\mathcal{L}_0$ von $I = \gamma'(1)$ und den Operatoren $B_x = \gamma'(p(x)), x \in E$, erzeugt wird. Jedes $u \in PC(E, <, >)$ besitzt eine Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^r a_i \overline{e_{ij}}_{1 \leq j \in I_1} e_{ij} \overline{e_{ik}}_{1 \leq k \in K_1} (e_{ik}^2 - 1),$$

wobei die Vektoren $e_{i_s} \in E$ orthonormiert und J -reell sind.

Der Beweis von Theorem 2 zeigt dann:

$$\gamma'(u)\Omega = \sum_{l=1}^r \sqrt{c|I_l| + 2|K_l|} a_l \prod_{I_1} e_{i_j} \prod_{I_k} e_{i_k}^2 \quad .$$

Wegen der Orthogonalität der Summanden $\prod_{I_1} e_{i_j} \prod_{K_1} e_{i_k}^2, l=1, \dots, r$,
in $\hat{F}_0(E)$, wird $\gamma'(u)\Omega$ nur dann 0, wenn alle $a_l, l=1, \dots, r$, verschwinden, d.h. wenn $u=0$ gilt. Dies zeigt die Injektivität von γ' . ■

Bem.: γ' ist kein $\times$ -Isomorphismus, da i.a. $B_X^* = B_{JX} \nrightarrow B_X$ gilt.

VI Die Idealstruktur und die irreduziblen Darstellungen von $PC(E)$ für endlichdimensionales E

Für endlichdimensionales E ist bekanntlich $PC(E)$ eine vollständige Hilbertalgebra. Aus der Theorie der vollständigen Hilbertalgebren folgt dann, daß $PC(E)$ eine Zerlegung in paarweise orthogonale zweiseitige Ideale besitzt und daß man die irreduziblen Darstellungen von $PC(E)$ über minimalen Linksidealen realisieren kann.

Def.: Sei $\mathcal{A}$ eine vollständige Hilbertalgebra.

Eine Projektion $P \in \mathcal{A}$, $P \neq 0$, heißt minimal (irreduzibel), wenn sie nur die Nullprojektion majorisiert, d.h. wenn die Zerlegung $P = P_1 + P_2$ in orthogonale Projektionen $P_1 = 0$ oder $P_2 = 0$ impliziert.

Ein Linksideal $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$ heißt minimal, wenn $\mathcal{L} \neq \{0\}$ ist und $\mathcal{L}$ kein von $\{0\}$ und $\mathcal{L}$ verschiedenes Linksideal enthält.

Der folgende Satz stellt u.a. die Verbindung zwischen minimalen Projektionen und minimalen Linksidealen her.

Satz 1 Sei $\mathcal{A}$ eine vollständige Hilbertalgebra.

- Jedes nichttriviale Linksideal in $\mathcal{A}$ enthält eine minimale Projektion.
- Ein Linksideal $\mathcal{L}$ in $\mathcal{A}$ ist genau dann minimal, wenn $\mathcal{L} = \mathcal{A}P$ gilt, wobei P eine minimale Projektion ist.

Bew.: a) [Dieudonné], 15, 8.6 (11)

b) [Dieudonné], 15, 8.7

■

Mit Satz 2 stellen wir nun ein Kriterium für die Irreduzibilität einer Projektion zur Verfügung.

Satz 2 Sei $\mathcal{A}$ eine vollständige Hilbertalgebra und $P \in \mathcal{A}$ eine Projektion.

Dann sind äquivalent:

- P ist minimal
- $P\mathcal{A}P = \mathbb{C}P$

Bew.: a) $\Rightarrow$ b)

Da $\mathcal{A}$ vollständig ist, ist die Multiplikation als bilineare Abbildung stetig. Folglich existiert eine zur $\|\cdot\|_2$ -Norm äquivalente Norm, die $\mathcal{A}$ zur Banachalgebra macht. Wie man sofort sieht, gilt:

$$P\mathcal{A}P = \{A \in \mathcal{A} \mid PAP = A\}$$

Die Stetigkeit der Multiplikation impliziert die Abgeschlossenheit von $P\mathcal{A}P$, so daß wir $P\mathcal{A}P$ o.E. als Banachalgebra betrachten können. Wir zeigen jetzt, daß jedes $A \in P\mathcal{A}P$, $A \neq 0$, invertierbar ist.

Die Behauptung folgt dann mit dem Satz von Gelfand-Mazur.

Sei $A \in \text{POLP}$ und $A \neq 0$. Dann ist αA ein von $\{0\}$ verschiedenes Links-ideal, das in OLP enthalten ist. Aufgrund der Minimalität von OLP erhalten wir dann $\alpha A = \alpha P$, was die Linksinvertierbarkeit und damit die Invertierbarkeit impliziert.

b) $\implies$ a)

Hier benötigen wir die Vollständigkeit von $\mathcal{O}$ nicht.

Sei $P = P_1 + P_2$ reduzibel. Dann ist POLP aber mindestens zweidimensional, da $\text{POLP} \supseteq \langle P_1, P_2 \rangle$ und P_1, P_2 linear unabhängig sind. Folglich gilt $\text{POLP} = \mathbb{C}P$. ■

Wir suchen jetzt die Projektionen in $\text{PC}(E)$ und sondern dann die minimalen Projektionen aus. In diesem Kapitel bezeichne - falls nicht ausdrücklich anders definiert - E einen n -dimensionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Satz 3a) $p_i := \frac{1}{2}e_i^2$ ist Projektion für $i=1, \dots, n$.

b) $p_i p_j = p_j p_i$

c) $e_i p_i = e_i = p_i e_i$

$$e_i p_j = (1 - p_j) e_i \quad i \neq j$$

$$(1 - p_i) e_i = 0 = e_i (1 - p_i)$$

Bew.: a) $p_i^* = \frac{1}{2}e_i^2 = \frac{1}{2}e_i^2 = p_i$

$$p_i^2 = \frac{1}{4}e_i^4 = \frac{1}{2}e_i^2 = p_i$$

b) $i \neq j \quad p_i p_j = \frac{1}{4}e_i^2 e_j^2 = \frac{1}{4}(2e_j - e_j e_i^2) e_j = \frac{1}{4}(2e_j^2 - e_j(2e_j - e_j e_i^2))$

$$= \frac{1}{4}e_j^2 = p_j p_i$$

c) $e_i p_i = \frac{1}{2}e_i^3 = \frac{1}{2}e_i^2 = e_i = p_i e_i$

$$e_i p_j = e_i \frac{1}{2}e_j^2 = \frac{1}{2}(2e_i - e_j^2 e_i) = (1 - \frac{1}{2}e_j^2) e_i = (1 - p_j) e_i$$

$$(1 - p_i) e_i = e_i - p_i e_i = e_i - e_i = 0 = e_i (1 - p_i)$$
 ■

Def.: $I := \{1, \dots, n\}$

Sei $J \subseteq I$. Wir definieren dann:

$$p(J) := \prod_{j \in J} p_j \prod_{j \in \bar{J}} (1 - p_j) \quad , \quad \text{wobei } \bar{J} := I \setminus J \text{ ist.}$$

Satz 4a) $p(J)$ ist Projektion für alle $J \subseteq I$.

b) $p(J)p(K) = 0 \quad \text{für } J \neq K$

c) $\sum_{J \subseteq I} p(J) = 1$

d)
$$e_i p(J) = \begin{cases} p(\bar{J} \cup \{i\}) e_i & i \in J \\ 0 & i \in \bar{J} \end{cases}$$

Bew.: a) Die Behauptung ergibt sich sofort aus Satz 3a), b).

b) Ist $J \neq K$, so ist $(J \setminus K) \cup (K \setminus J) \neq \emptyset$.

Wir können o.E. $J \setminus K \neq \emptyset$ annehmen. Sei $k \in J \setminus K = J \cap \bar{K}$, dann gilt

$$p(J)p(K) = p(J)p_k(1-p_k)p(K) = 0.$$

c) Wir beweisen die Behauptung durch Induktion nach n .

$$n=1 \quad \sum_{J \subseteq \{1\}} p(J) = 1 - p_1 + p_1 = 1$$

$$\begin{aligned} n \rightarrow n+1 \quad \sum_{J \subseteq \{1 \dots n+1\}} p(J) &= \sum_{J' \subseteq \{1 \dots n\}} p(J')p_{n+1} + \sum_{J' \subseteq \{1 \dots n\}} p(J')(1-p_{n+1}) \\ &= p_{n+1} + 1 - p_{n+1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

d) Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz 3c). ■

Wir zeigen nun, daß die Projektionen $p(J)$, $J \in I$, fast immer irreduzibel sind.

Satz 5 $p(J)$ ist minimal, falls $|J| \neq \frac{n+1}{2}$ ist.

Bew.: Wir wollen Satz 2 anwenden. Zu diesem Zweck berechnen wir die Produkte $p(J)e_{(L_u, L_g, K)}p(J), e_{(L_u, L_g, K)} \in B(\mathbb{R})$.

Als erstes bemerken wir, daß wir aufgrund der Gleichung

$$(e_1^2 - 1)p(J) = \begin{cases} p(J) & i \in J \\ -p(J) & i \in \bar{J} \end{cases}$$

o.E. $K = \emptyset$ wählen können.

Wir betrachten zuerst den Fall $|L_u| = |L_g|$.

Ist $L_u = L_g = \emptyset$, so ist $e_{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)} = 1$ und somit $p(J)e_{(\emptyset, \emptyset, \emptyset)}p(J) = p(J)$.

Ist $L_u \neq \emptyset$, so können wir $e_{(L_u, L_g, \emptyset)} = e_{i_1} \dots e_{i_{2m}}$ mit $m \geq 1$ schreiben.

$$\begin{aligned} i_{2r-1} \in L_u \cap \bar{J} \quad p(J)e_{i_1} \dots e_{i_{2m}} &= (-1)^{r-1} p(J)(1-p_{i_{2r-1}})e_{i_{2r-1}}e_{i_2} \dots e_{i_{2m}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_{2r} \in L_g \cap \bar{J} \quad e_{i_1} \dots e_{i_{2m}} p(J) &= (-1)^{m-r} e_{i_1} \dots e_{i_{2m-1}} e_{i_{2r}} (1-p_{i_{2r}})p(J) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es gilt also: $p(J)e_{(L_u, L_g, \emptyset)}p(J) = 0$ für $(L_u \cup L_g) \cap \bar{J} \neq \emptyset$.

Sei nun $(L_u \cup L_g) \cap \bar{J} = \emptyset$, d.h. $L_u \cup L_g \subseteq J$.

$$\begin{aligned} e_{i_1} \dots e_{i_{2m}} p(J) &= e_{i_1} \dots e_{i_{2m-1}} p(\bar{J} \cup \{i_{2m}\})e_{i_{2m}} \quad (i_{2m} \in J) \\ &= 0 \quad (i_{2m-1} \notin \bar{J} \cup \{i_{2m}\}) \end{aligned}$$

Sei jetzt $|L_u| = |L_g| + 1$ und $e_{(L_u, L_g, \emptyset)} = e_{i_1} \dots e_{i_{2m+1}}$.

Mit den gleichen Überlegungen wie oben erhält man:

$$p(J)e_{(L_u, L_g, \emptyset)} = 0 \quad \text{für } L_u \cap \bar{J} \neq \emptyset.$$

Sei nun $L_u \subseteq J$ und $i_{2r} \in J$. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}
 e_{i_1} \dots e_{i_{2m+1}} p(J) &= e_{i_1} \dots e_{i_{2m}} p(\bar{J} \cup \{i_{2m+1}\}) e_{i_{2m+1}} \\
 &= (-1)^{m-r} e_{i_1} \dots e_{i_{2r}} (1-p_{i_{2r}}) p(\bar{J} \cup \{i_{2m+1}\}) e_{i_{2m+1}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Es folgt $e_{(L_u, L_g, \emptyset)} p(J) = 0$ für $L_g \cap J \neq \emptyset$.

Ist aber $L_u \subseteq J$ und $L_g \subseteq \bar{J}$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 p(J) e_{(L_u, L_g, \emptyset)} p(J) &= p(J) p((\bar{J} \setminus L_g) \cup L_u) e_{(L_u, L_g, \emptyset)} \\
 &= \begin{cases} p(J) e_{(L_u, L_g, \emptyset)} & J = (\bar{J} \setminus L_g) \cup L_u \\ 0 & J \neq (\bar{J} \setminus L_g) \cup L_u \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ist $J = (\bar{J} \setminus L_g) \cup L_u$, so bekommt man $|J| = |\bar{J}| + 1$ und damit $|J| = \frac{n+1}{2}$.

Diesen Fall haben wir aber von vorneherein ausgeschlossen.

Fassen wir das Ergebnis all dieser Rechnungen zusammen, dann erhalten wir:

$$p(J) e_{(L_u, L_g, K)} p(J) = \begin{cases} p(J) & L_u = L_g = K = \emptyset \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies bedeutet aber nach Satz 2 gerade die Minimalität von $p(J)$. ■

Bem.: Ist n gerade, so besagt Satz 4, daß alle Projektionen $p(J)$, $J \subseteq I$, minimal sind.

Die Gleichung $J = (\bar{J} \setminus L_g) \cup L_u$ wird genau durch $J = L_u$ und $\bar{J} = L_g$ erfüllt.

Def.: Sei $|J| = \frac{n+1}{2}$. Wir setzen dann $e_J := e_{(J, \bar{J}, \emptyset)}$.

Satz 6 Ist $|J| = \frac{n+1}{2}$, so gilt: $p(J) p_C(E) p(J) = \langle p(J), e_J \rangle \cdot p(J)$ ist reduzibel.

Bew.: Die Reduzibilität von $p(J)$ folgt sofort aus der linearen Unabhängigkeit von e_J und $p(J)$.

Zum Beweis der ersten Behauptung müssen wir wegen Satz 5 nur noch $p(J) e_J p(J)$ betrachten.

$$\begin{aligned}
 p(J) e_J p(J) &= p(J)^2 e_J = p(J) e_J = p(J) e_{i_1} \dots e_{i_n} \\
 &= p_{i_1} e_{i_1} \sqrt{\frac{p_{i_1}}{\bar{J}}} \sqrt{\frac{p_{i_1}}{J \setminus \{i_1\}}} (1-p_{i_1}) e_{i_2} \dots e_{i_n} \\
 &= e_{i_1} \sqrt{\frac{p_{i_1}}{\bar{J}}} \sqrt{\frac{p_{i_1}}{J \setminus \{i_1\}}} (1-p_{i_1}) e_{i_2} \dots e_{i_n} \\
 &= \dots \\
 &= e_J
 \end{aligned}$$

Wir geben nun einige Eigenschaften von e_J an.

Lemma 1a) $p(J) e_J = e_J = e_J p(J)$

b) $e_J^* = (-1)^m e_J$, wobei $n = 2m+1$

$$c) \quad 2^{-n} e_J^* e_J = p(J)$$

Bew.: a) Die Behauptung ergibt sich aus dem Beweis von Satz 6.

b) Wir führen den Beweis durch Induktion nach m.

$$m=0 \quad e_1^* = e_1$$

$$\begin{aligned} m \rightarrow m+1 \quad e_J^* &= e_{12m+3} \cdots e_{11} \\ &= (-1)^m e_{12m+3} e_{12m+2} (e_{11} \cdots e_{12m+1}) \\ &= (-1)^{m+1} (-1)^m e_{11} e_{12m+2} \cdots e_{12m} e_{12m+3} \\ &= (-1)^1 (-1)^m e_{11} e_{12} \cdots e_{12m+2} e_{12m+3} \\ &= (-1)^{m+1} e_J \end{aligned}$$

c) Wir machen Induktion nach n.

$$n=0 \quad 2^{-1} e_{\{1\}} e_{\{1\}} = \frac{1}{2} e_1^2 = p(\{1\})$$

$$n \rightarrow n+2$$

$$\begin{aligned} 2^{-n-2} e_J^* e_J &= 2^{-2} e_{1n+2} e_{1n+1} \overbrace{e_{J \setminus \{1n+2\}}}^{p_1} \overbrace{e_{J \setminus \{1n+1\}}}^{(1-p_1)} e_{1n+1} e_{1n+2} \\ &= 2^{-2} e_{1n+2} \overbrace{e_{J \setminus \{1n+2\}}}^{(1-p_1)} \overbrace{e_{J \setminus \{1n+1\}}}^{p_1} e_{1n+1}^2 e_{1n+2} \\ &= 2^{-1} e_{1n+2} \overbrace{e_{J \setminus \{1n+2\}}}^{(1-p_1)} \overbrace{e_J}^{p_1} e_{1n+2} \\ &= 2^{-1} \overbrace{e_{J \setminus \{1n+2\}}}^{p_1} \overbrace{e_J}^{(1-p_1)} e_{1n+2}^2 \\ &= \overbrace{e_J}^{p_1} \overbrace{e_J}^{(1-p_1)} \\ &= p(J) \end{aligned}$$

Wie wir in Satz 6 gesehen haben, ist $p(J)$ für $|J| = \frac{n+1}{2}$ reduzibel. Wir wollen nun diese $p(J)$ in minimale Projektionen zerlegen.

Def.: Sei $n = 2m+1$. Wir setzen dann:

$$a := \begin{cases} 2^{-\frac{n+1}{2}} & m \text{ gerade} \\ i 2^{-\frac{n+1}{2}} & m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Bem.: In jedem Fall gilt: 1) $a^2 = (-1)^m 2^{-n-2}$

$$2) \quad \bar{a} = (-1)^m a$$

Def.: Sei $|J| = \frac{n+1}{2}$. Wir definieren dann:

$$r(J) := \frac{1}{2} p(J) + a e_J \quad \text{und} \quad q(J) := \frac{1}{2} p(J) - a e_J$$

Satz 7 $r(J)$ und $q(J)$ sind minimale, orthogonale Projektionen mit Summe $p(J)$.

Bew.: Die Aussage $r(J) + q(J) = p(J)$ ist trivial.

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $p(J)$ und e_J sind $r(J)$ und $q(J)$ von 0 verschieden. Wir rechnen nun nach, daß $r(J)$ und $q(J)$ ortho-

gonale Projektionen sind.

$$\begin{aligned} r(J)q(J) &= \left(\frac{1}{2}p(J) + ae_J\right)\left(\frac{1}{2}p(J) - ae_J\right) \\ &= \frac{1}{4}p(J) - \frac{a}{2}e_J + \frac{a}{2}e_J - a^2e_J^2 = \frac{1}{4}p(J) - (-1)^m 2^{-n-2} (-1)^m e_J^* e_J \\ &= \frac{1}{4}p(J) - \frac{1}{4}p(J) = 0 \end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt noch, daß $r(J)$ eine minimale Projektion ist. Die entsprechenden Aussagen für $q(J)$ beweist man vollkommen analog.

$$\begin{aligned} r(J)^* &= \frac{1}{2}p(J) + \overline{a}e_J^* = \frac{1}{2}p(J) + (-1)^m \overline{a}e_J = \frac{1}{2}p(J) + ae_J = r(J) \\ r(J)^2 &= \frac{1}{4}p(J) + \frac{a}{2}p(J)e_J + \frac{a}{2}e_J p(J) + a^2e_J^2 = \frac{1}{4}p(J) + ae_J + \frac{1}{4}p(J) \\ &= \frac{1}{2}p(J) + ae_J = r(J) \end{aligned}$$

$$r(J)PC(E)r(J) = r(J)(p(J)PC(E)p(J))r(J) = r(J) \langle p(J), e_J \rangle r(J)$$

$$\begin{aligned} r(J)p(J)r(J) &= r(J) \\ r(J)e_Jr(J) &= \left(\frac{1}{2}p(J) + ae_J\right)e_Jr(J) = \left(\frac{1}{2}e_J + ae_J^2\right)r(J) \\ &= \left(\frac{1}{2}e_J + (-1)^m \overline{a}e_J^* e_J\right)r(J) \\ &= \left(\frac{1}{2}e_J + (-1)^m a 2^n p(J)\right)r(J) \\ &= (-1)^m 2^{n+1} a \left(\frac{1}{2}p(J) + (-1)^m 2^{-n-2} a^{-1} e_J\right)r(J) \\ &= (-1)^m 2^{n+1} a \left(\frac{1}{2}p(J) + ae_J\right)r(J) \\ &= (-1)^m 2^{n+1} a r(J)^2 = (-1)^m 2^{n+1} a r(J) \end{aligned}$$

$$\text{Also ist } r(J)PC(E)r(J) = \mathbb{C}r(J) \quad \blacksquare$$

Zur Konstruktion der zweiseitigen Ideale müssen wir wissen, welche der minimalen Projektionen äquivalent sind.

Def.: Zwei Projektionen P, Q heißen äquivalent, wenn es eine partielle Isometrie U mit $U^*U = P$ und $UU^* = Q$ gibt.

$$F(j) := \{J \subseteq I \mid |J| = j \vee |J| = n+1-j\} \quad j=0, 1, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$$

Satz 8 Alle Projektionen $p(J), J \in F(j)$, sind äquivalent.

Bew.: Ist $j=0$, so ist $F(j)$ einelementig und damit die Behauptung trivial.

Sei also $j \geq 1$. Wir zeigen zunächst, daß $p(J)$ und $p(L)$ für $|J| = |L|$ äquivalent sind.

$$\begin{aligned} u &:= 2^{-\frac{|L \setminus J \cup J \setminus L|}{2}} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{I_u = L \setminus J} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{e_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{p_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} (1-p_1) \\ &\quad I_g = J \setminus L \\ u^*u &= 2^{-|L \setminus J \cup J \setminus L|} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{p_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} (1-p_1) \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{e_1^*} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{I_g = L \setminus J} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{e_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{p_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} (1-p_1) \\ &\quad \stackrel{(*)}{=} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{p_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} (1-p_1) \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \setminus L} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{p_1} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{L \setminus J} (1-p_1) \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}_{J \cap L} (1-p_1) \end{aligned}$$

$$= \prod_J \prod_{j \in J} p_1 \prod_{j \notin J} (1-p_1) = p(J)$$

Für die Richtigkeit des Gleichheitszeichens (*) beachte man Lemma 1c) und den Beweis dazu.

Aufgrund der Transitivität und der Symmetrie der Äquivalenz genügt es nun, wenn wir die Äquivalenz von $p(\{1, \dots, j\})$ und $p(\{j, \dots, n\})$ nachweisen.

$$\begin{aligned} u &:= 2^{-\frac{1}{2}} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, j-1\}} p_1 \prod_{j \in \{j+1, \dots, n\}} (1-p_1) \\ u^* u &= \prod_{j \in \{1, \dots, j-1\}} p_1 \prod_{j \in \{j+1, \dots, n\}} (1-p_1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, j-1\}} p_1 \prod_{j \in \{j+1, \dots, n\}} (1-p_1) \\ &= \prod_{j \in \{1, \dots, j\}} p_1 \prod_{j \in \{j+1, \dots, n\}} (1-p_1) = p(\{1, \dots, j\}) \\ uu^* &= 2^{-1} \cdot \prod_{j \in \{1, \dots, j-1\}} p_1 \prod_{j \in \{j+1, \dots, n\}} (1-p_1) \cdot e_j \\ &= 2^{-1} \cdot \prod_{j \in \{j+1, \dots, n\}} p_1 \prod_{j \in \{1, \dots, j-1\}} (1-p_1) \\ &= p(\{j, \dots, n\}) \end{aligned}$$

Die Äquivalenz zwischen den Projektionen $r(J)$ und $q(J)$ ist komplizierter. Zur Untersuchung ihrer Äquivalenz benötigen wir folgende Definitionen.

Def. 1 Sei $J \subseteq I$. $s(J) := \sum_{i \in J} 1$

Sei n ungerade. $F_u(\frac{n+1}{2}) := \{J \in F(\frac{n+1}{2}) \mid s(J) \text{ ungerade}\}$

$F_g(\frac{n+1}{2}) := \{J \in F(\frac{n+1}{2}) \mid s(J) \text{ gerade}\}$

Satz 9a) Die Projektionen $r(J), J \in F_u(\frac{n+1}{2})$, und $q(J), J \in F_g(\frac{n+1}{2})$, sind äquivalent.

b) Die Projektionen $q(J), J \in F_u(\frac{n+1}{2})$, und $r(J), J \in F_g(\frac{n+1}{2})$, sind äquivalent.

Bew.: a) Sei $J \in F_u(\frac{n+1}{2})$ und $L \in F(\frac{n+1}{2})$, $L \neq J$. u bezeichne dann die partielle Isometrie mit Anfangsprojektion $p(J)$ und Endprojektion $p(L)$,

$$\text{d.h.} \quad u = 2^{-\frac{|J \Delta L|}{2}} \prod_{i \in L \setminus J} p_1 \prod_{i \in J \setminus L} (1-p_1) \quad .$$

Wir definieren dann: $v := ur(J)$.

$$v^* v = r(J) u^* u r(J) = r(J) p(J) r(J) = r(J)$$

$$\begin{aligned} vv^* &= ur(J) u^* = u \left(\frac{1}{2} p(J) + a e_J \right) u^* = \frac{1}{2} u u^* u u^* + a u e_J u^* \\ &= \frac{1}{2} p(L) + a e_J u^* \end{aligned}$$

Wir müssen folglich den Ausdruck $u e_J u^*$ genauer untersuchen.

Sei $k=12r+1 \in J$.

$$\begin{aligned}
 p_k e_J &= p_k e_{i_1} \dots e_{i_{2r+1}} \dots e_{i_n} \\
 &= e_{i_1} \dots p_k e_{i_{2r+1}} \dots e_{i_n} \\
 &= e_{i_1} \dots e_{i_{2r+1}} \dots e_{i_n} = e_J \\
 &= e_{i_1} \dots e_{i_{2r+1}} p_k \dots e_{i_n} \\
 &= e_J p_k
 \end{aligned}$$

Genauso erhält man für alle $l \in \bar{J}$: $(1-p_1)e_J = e_J = e_J(1-p_1)$.

$$\text{Dies zeigt } u_{e_J} u^* = 2^{-|I_u \cup I_J|} \prod_{\substack{I_u=L \setminus J \\ I_g=J \setminus L}} e_i e_J \left(\prod_{\substack{I_u=L \setminus J \\ I_g=J \setminus L}} e_i \right)^*.$$

Sei nun $i=j_{2s+1} \in J$. Dann sind s Elemente aus J kleiner als i und $m-s$ ($n=2m+1$) Elemente größer als i und $i-1-s$ Zahlen aus $\bar{J}$ kleiner als i . Diese Überlegungen rechtfertigen die folgenden Rechnungen.

$$\begin{aligned}
 e_{i^*} e_J &= e_{i^*} e_{j_1} \dots e_{j_{2s+1}} \dots e_{j_{2m+1}} \\
 &= (-1)^{m-s} e_{i^*} e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} e_i \\
 &= (-1)^{m-s} (-1)^{i-1-s} e_{j_2} \dots e_{j_1} \dots e_{j_{2m}} e_i \\
 &= (-1)^{m-1+i} e_{\bar{J} \cup \{i\}} e_i
 \end{aligned}$$

Beachtet man nun, daß $|I_u| + |I_g|$ gerade ist, so erhält man:

$$\begin{aligned}
 \prod_{I_u, I_g} e_i e_J &= (-1)^{s(I_u \cup I_g)} e_{J \setminus I_g \cup I_u} \prod_{I_u, I_g} e_i \\
 &= (-1)^{s(J) + s(L)} e_{L \setminus I_u, I_g} e_i \\
 (\times)
 \end{aligned}$$

$$(\times) \quad J \setminus I_g \cup I_u = J \setminus (J \setminus L) \cup L \setminus J = J \cap L \cup L \setminus J = L$$

$$s(J) + s(L) = s(I_u \cup I_g) + 2s(J \cap L)$$

Jetzt können wir endlich $u_{e_J} u^*$ ausrechnen.

$$\begin{aligned}
 u_{e_J} u^* &= 2^{-|I_u \cup I_g|} \prod_{I_u, I_g} e_i e_J \left(\prod_{I_u, I_g} e_i \right)^* \\
 &= (-1)^{s(J) + s(L)} e_L 2^{-|I_u \cup I_g|} \prod_{I_u, I_g} e_i \left(\prod_{I_u, I_g} e_i \right)^* \\
 &= (-1)^{s(J) + s(L)} e_L \prod_{L \setminus J} p_1 \prod_{J \setminus L} (1-p_1) \\
 &= (-1)^{s(J) + s(L)} e_L \\
 &= \begin{cases} e_L & s(J) + s(L) \text{ gerade, d.h. } L \in \mathbb{F}_u \left(\frac{n+1}{2} \right) \\ -e_L & s(J) + s(L) \text{ ungerade, d.h. } L \in \mathbb{F}_g \left(\frac{n+1}{2} \right) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Wir setzen nun obigen Ausdruck in $vv^* = \frac{1}{2} p(L) + a u_{e_J} u^* e_{i_n}$.

$$vv^* = \begin{cases} r(L) & \text{LeF}_u(\frac{n+1}{2}) \\ q(L) & \text{LeF}_g(\frac{n+1}{2}) \end{cases}$$

v ist also partielle Isometrie mit Anfangsprojektion $r(J)$ und Endprojektion $r(L)$ bzw. $q(L)$.

- b) Wir definieren erst $w := uq(J)$ und rechnen dann nach, daß w partielle Isometrie mit Anfangsprojektion $q(J)$ und Endprojektion $q(L)$ bzw. $r(L)$ ist.

$$w^*w = q(J)u^*uq(J) = q(J)p(J)q(J) = q(J)$$

$$ww^* = uq(J)u^* = u(p(J) - r(J))u^* = up(J)u^* - ur(J)u^*$$

$$= \begin{cases} p(L) - r(L) = q(L) & \text{LeF}_u(\frac{n+1}{2}) \\ p(L) - q(L) = r(L) & \text{LeF}_g(\frac{n+1}{2}) \end{cases} \quad \blacksquare$$

Als nächstes zeigen wir, daß die Summen äquivalenter Projektionen zentral sind.

Def.: Sei $j=0, \dots, [\frac{n+1}{2}]$. Wir definieren dann:

$$p(j) := \sum_{J \in F(j)} p(J)$$

Ist n ungerade, so definieren noch:

$$p_1(\frac{n+1}{2}) := \sum_{J \in F_u(\frac{n+1}{2})} r(J) + \sum_{J \in F_g(\frac{n+1}{2})} q(J)$$

$$p_2(\frac{n+1}{2}) := \sum_{J \in F_u(\frac{n+1}{2})} q(J) + \sum_{J \in F_g(\frac{n+1}{2})} r(J) = p(\frac{n+1}{2}) - p_1(\frac{n+1}{2})$$

Satz 10 Die Projektionen $p(j), j=0, \dots, [\frac{n+1}{2}]$, $p_1(\frac{n+1}{2})$ und $p_2(\frac{n+1}{2})$ sind zentral.

$$\begin{aligned} \text{Bew.: } e_k p(j) &= e_k \sum_{J \in F(j)} p(J) = \sum_{\substack{J \in F(j) \\ k \in J}} e_k p(J) = \sum_{\substack{J \in F(j) \\ k \in J}} p(\bar{J} \cup \{k\}) e_k \\ &= \sum_{\substack{L \in F(j) \\ k \in L}} p(L) e_k = p(j) e_k \end{aligned}$$

Wegen $p_1(\frac{n+1}{2}) \leq p(\frac{n+1}{2})$ gilt für alle $i \in \bar{J}$ auch:

$$e_i p_1(\frac{n+1}{2}) = 0 = p_1(\frac{n+1}{2}) e_i$$

Sei also $i \in J$.

$$e_i p_1(\frac{n+1}{2}) = \sum_{\substack{J \in F_u(\frac{n+1}{2}) \\ i \in J}} e_i r(J) + \sum_{\substack{J \in F_g(\frac{n+1}{2}) \\ i \in J}} e_i q(J)$$

$$e_i r(J) = e_i (\frac{1}{2} p(J) + a e_J) = (\frac{1}{2} p(\bar{J} \cup \{i\}) + (-1)^{m-1+i} a e_{\bar{J} \cup \{i\}}) e_i$$

$$= \begin{cases} q(\bar{J} \cup \{i\}) e_i & i+m \text{ gerade} \\ r(\bar{J} \cup \{i\}) e_i & i+m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Wir untersuchen nun, wann $s(\bar{J} \cup \{i\})$ gerade bzw. ungerade ist.

$$s(\bar{J} \cup \{i\}) = s(\bar{J}) + i = s(I) - s(J) + i$$

$$s(I) = \sum_{i=1}^{2m+1} i = (m+1)(2m+1)$$

Ist $i+m$ gerade, so wird $s(I) + i$ ungerade, da $s(I) + m$ immer ungerade ist. Weil nach Voraussetzung $s(J)$ ungerade ist, impliziert die obere Gleichung nun, daß $s(\bar{J} \cup \{i\})$ gerade ist. Dies bedeutet aber $\bar{J} \cup \{i\} \in F_g(\frac{n+1}{2})$. Genauso sieht man, daß $\bar{J} \cup \{i\} \in F_u(\frac{n+1}{2})$ gilt, falls $i+m$ ungerade ist.

$$\begin{aligned} e_1 q(J) &= e_1 \left(\frac{1}{2} p(J) - a e_J \right) = \left(\frac{1}{2} p(\bar{J} \cup \{i\}) + (-1)^{i+m} a e_{\bar{J} \cup \{i\}} \right) e_1 \\ &= \begin{cases} r(\bar{J} \cup \{i\}) e_1 & i+m \text{ gerade} \\ q(\bar{J} \cup \{i\}) e_1 & i+m \text{ ungerade} \end{cases} \end{aligned}$$

Diesmal ist nach Voraussetzung $s(J)$ gerade. Folglich werden obige Implikationen vertauscht, d.h. " $i+m$ ungerade" impliziert $\bar{J} \cup \{i\} \in F_g(\frac{n+1}{2})$ und " $i+m$ gerade" impliziert $\bar{J} \cup \{i\} \in F_u(\frac{n+1}{2})$.

Sei nun $i+m$ gerade.

$$\begin{aligned} e_1 p_1\left(\frac{n+1}{2}\right) &= \sum_{\substack{J \in F_u(\frac{n+1}{2}) \\ i \in J}} e_1 r(J) + \sum_{J \in F_g(\frac{n+1}{2})} e_1 q(J) \\ &= \sum_{\substack{J \in F_u(\frac{n+1}{2}) \\ i \in J}} q(\bar{J} \cup \{i\}) e_1 + \sum_{\substack{J \in F_g(\frac{n+1}{2}) \\ i \in J}} r(\bar{J} \cup \{i\}) e_1 \\ &= \sum_{\substack{L \in F_g(\frac{n+1}{2}) \\ i \in L}} q(L) e_1 + \sum_{\substack{L \in F_u(\frac{n+1}{2}) \\ i \in L}} r(L) e_1 \\ &= p_1\left(\frac{n+1}{2}\right) e_1 \end{aligned}$$

Den Fall " $i+m$ ungerade" beweist man vollkommen analog.

Die Zentralität von $p_2(\frac{n+1}{2})$ ist eine unmittelbare Folge der Zentralität von $p(\frac{n+1}{2})$ und $p_1(\frac{n+1}{2})$. ■

Die zentralen Projektionen erlauben uns jetzt die Definition zweiseitiger $\ast$ -Ideale in $PC(E)$.

Def.: $I(j) := PC(E)p(j) \quad j=0, \dots, \left[\frac{n+1}{2}\right]$

$$I_1\left(\frac{n+1}{2}\right) := PC(E)p_1\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$$I_2\left(\frac{n+1}{2}\right) := PC(E)p_2\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

, falls n ungerade

Das folgende Theorem klärt die Idealstruktur von $PC(E)$ für endlichdimen-

sionales E auf.

Theorem 1 Sei E ein $2m(2m+1)$ -dimensionaler, reeller Hilbertraum. $PC(E)$ besitzt dann eine Zerlegung in $m+1$ ($m+3$) paarweise orthogonale, minimale zweiseitige $\star$ -Ideale.

Bew.: Die oben definierten Ideale erfüllen die Behauptung.

Aufgrund der Zentralität der sie definierenden Projektionen ist es klar, daß es sich um zweiseitige $\star$ -Ideale handelt. Die Orthogonalität der Ideale folgt aus der Tatsache, daß das Produkt zweier verschiedener zentraler Projektionen verschwindet. Es bleibt nur noch die Minimalität der Ideale zu zeigen.

Sei nun $J \neq \{0\}$ ein zweiseitiges Ideal, das in $I(k)$ enthalten ist. J ist insbesondere ein Linksideal und enthält daher eine minimale Projektion P . Da $P \neq 0$ ist, ist auch für mindestens ein $L \in F(k)$ $Pp(L) \neq 0$. Nun folgt unmittelbar, daß auch

$$(Pp(L))^* Pp(L) = p(L)Pp(L) = \lambda p(L) \neq 0 \quad \text{ist.}$$

Da J ein zweiseitiges Ideal ist, liegt folglich $p(L)$ in J .

Sei jetzt $K \in F(k)$ und v_K bezeichne die partielle Isometrie mit Anfangsprojektion $p(L)$ und Endprojektion $p(K)$. Wegen der Identität $v_K p(L) = v_K$ gilt $v_K \in J$. Dies wiederum impliziert $v_K v_K^* = p(K) \in J$ für alle $K \in F(k)$. Somit gilt für alle $a \in I(k)$

$$a = \sum_{K \in F(k)} \lambda_K p(K) \in J.$$

Wir erhalten also $J = I(k)$ und damit die Minimalität von $I(k)$.

Die Minimalität von $I_1(m+1)$ und $I_2(m+1)$ beweist man vollkommen analog. ■

Bem.: Mit Hilfe von Theorem 1 aus Kapitel V können wir nun auch die Frage nach der Idealstruktur von $PF(E)$ beantworten. Ist E ein n -dimensionaler komplexer Hilbertraum, so ist $E_{\mathbb{R}}$ ein $2n$ -dimensionaler reeller Hilbertraum. $PC(E_{\mathbb{R}})$ und damit auch $PF(E)$ besitzen dann eine Zerlegung in $n+1$ zweiseitige Ideale. Dies ist gerade die Aussage von [Scheiba], Theorem 4.1. Vergleicht man die beiden Beweise, so sieht man, daß der Umweg über die Paracliffordalgebra wegen deren einfacherer Struktur leichter und schneller zum Ziel führt. Zumal man ja die kompliziertere Idealstruktur von $PC(E)$ für $2m+1$ -dimensionales E nicht berücksichtigen braucht, wenn man nur an der Struktur von $PF(E)$ interessiert ist.

Wir können jetzt die irreduziblen Darstellungen von $PC(E)$ über minimalen Linksidealen realisieren. Wir geben zuerst einige Definitionen.

Def.: Sei E ein n -dimensionaler, reeller Hilbertraum.

$$\pi(\emptyset) := p(\emptyset) \quad \pi(j) := p(\{1, \dots, j\}) \quad \text{für } j=1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

$$E(j) := PC(E)\pi(j) \quad \text{für } j=0, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$$

$$\begin{array}{ccc} U_j: PC(E) & \longrightarrow & L(E(j)) \\ a & \longmapsto & L_a \end{array}$$

Ist $\dim E = n = 2m+1$, so definieren wir zusätzlich:

$$\begin{array}{ll} \pi_1(m+1) := r(\{1, 2, 4, \dots, 2m\}) & \pi_2(m+1) := q(\{1, 2, 4, \dots, 2m\}) \\ E_1(m+1) := PC(E)\pi_1(m+1) & E_2(m+1) := PC(E)\pi_2(m+1) \\ U_{m+1}^1: PC(E) \longrightarrow L(E_1(m+1)) & U_{m+1}^2: PC(E) \longrightarrow L(E_2(m+1)) \\ a \longmapsto L_a & a \longmapsto L_a \end{array}$$

Wir betrachten für den Rest dieses Kapitels nur noch $2m$ -dimensionale Räume E , um nicht andauernd Fallunterscheidungen durchführen zu müssen. Die Aussagen und Beweise für $2m+1$ -dimensionales E lassen sich jedoch mit den offensichtlichen Änderungen genau übertragen.

Satz 11 Sei E ein $2m$ -dimensionaler, reeller Hilbertraum. Dann sind die Abbildungen $U_j, j=0, \dots, m$, paarweise inäquivalente, irreduzible $*$ -Darstellungen von $PC(E)$.

Bew.: Die U_j sind trivialerweise $*$ -Darstellungen. Die Irreduzibilität der Darstellungen ist unmittelbare Konsequenz der Minimalität der Linksideale $E(j)$. Wir zeigen nun noch die Inäquivalenz.

Seien $j, k \in \{0, \dots, m\}$ und $j \neq k$, dann gilt für alle $a \in E(j)$:

$$\begin{aligned} U_j(\pi(k))a &= \pi(k)a = \pi(k)p(k)p(j)a \\ &= 0 \end{aligned}$$

Folglich ist $U_j(\pi(k)) = 0$.

Wegen $U_k(\pi(k))\pi(k) = \pi(k)$ ist aber $U_k(\pi(k)) \neq 0$, so daß die Darstellungen U_j und U_k unitär inäquivalent sind. ■

Der folgende Satz zeigt, daß wir in Satz 11 alle Darstellungen von $PC(E)$ über minimalen Linksidealen realisiert haben.

Satz 12 Ist $p(L)$ eine zu $\pi(j)$ äquivalente Projektion, so ist die Darstellung von $PC(E)$ über $PC(E)p(L)$ via Linksmultiplikation unitär äquivalent zur Darstellung U_j .

Bew.: Sei u eine partielle Isometrie mit Anfangsprojektion $\pi(j)$ und Endprojektion $p(L)$.

$$\begin{array}{ccc} T: E(j) & \longrightarrow & PC(E)p(L) \\ a & \longmapsto & au^* \end{array}$$

Die Gleichung $au^*p(L) = au^*uu^* = a\pi(j)u^* = au^*$ zeigt $au^* \in PC(E)p(L)$.

Wir zeigen jetzt, daß T der gesuchte Hilbertraumisomorphismus ist.

$$\|Ta\|_2^2 = (au^*, au^*) = (au^*u, a) = (a, a) = \|a\|_2^2$$

Man rechnet sofort nach, daß $PC(E)p(L) \ni b \longrightarrow bu$ die Umkehrabbildung von T ist, so daß T insbesondere auch surjektiv ist.

Sei $a \in E(j)$ und $b \in PC(E)$. Wir erhalten nun:

$$T^{-1}L_b Ta = T^{-1}L_b au^* = T^{-1}bau^* = bau^*u = ba = U_j(b)a \quad .$$

Wir geben nun eine Orthonormalbasis von $E(j)$ an. Diese Orthonormalbasis werden wir dann in Theorem 2 benutzen.

Lemma 2 $\{2^m u_L | L \in F(j)\}$ ist eine Orthonormalbasis von $E(j)$, wobei u_L eine partielle Isometrie mit Anfangsprojektion $\pi(j)$ und Endprojektion $p(L)$ ist.

Bew.: Wir zeigen zuerst, daß $\{2^m u_L | L \in F(j)\}$ ein Orthonormalsystem ist. Seien $L, K \in F(j)$.

$$\begin{aligned} (u_L, u_K) &= (p(L)u_L \pi(j), p(K)u_K \pi(j)) = (u_K^* p(K) p(L) u_L \pi(j), \pi(j)) \\ &= \begin{cases} \|\pi(j)\|^2 & L = K \\ 0 & L \neq K \end{cases} \end{aligned}$$

Bei der Berechnung der Norm von $\pi(j)$ benutzen wir die folgenden Identitäten.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{2} e_1^2 = \frac{1}{2} ((e_1^2 - 1) + 1) & 1 - p_1 &= \frac{1}{2} (1 - (e_1^2 - 1)) \\ \pi(j) &= \overline{\{1 \dots j\}} p_1 \overline{\{j+1 \dots 2m\}} (1 - p_1) = 2^{-2m} \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J \cap \{j+1 \dots 2m\}|} e_{(\emptyset, \emptyset, J)} \\ \|\pi(j)\|_2^2 &= \|2^m \pi(j)\|_2^2 = 2^{-2m} \left\| \sum_{J \subseteq I} (-1)^{|J \cap \{j+1 \dots 2m\}|} e_{(\emptyset, \emptyset, J)} \right\|_2^2 \\ &= 2^{-2m} 2^{2m} = 1 \end{aligned}$$

Wir weisen nun nach, daß $p(L)PC(E)\pi(j) = \langle u_L \rangle$ für alle $L \in F(j)$ gilt. Die Richtigkeit der Beziehung $\langle u_L \rangle \subseteq p(L)PC(E)\pi(j)$ ist offensichtlich. Zum Beweis der umgekehrten Inklusion zeigen wir, daß $p(L)PC(E)\pi(j)$ eindimensional ist.

$$\begin{array}{ccc} T_L: p(L)PC(E)\pi(j) & \longrightarrow & \pi(j)PC(E)\pi(j) = \langle \pi(j) \rangle \\ a & \longmapsto & u_L^* a \end{array}$$

Man rechnet leicht nach, daß T_L eine Isometrie ist. Folglich ist $p(L)PC(E)\pi(j)$ eindimensional. Wir erhalten somit für alle $a \in PC(E)$

$$p(L)a\pi(j) = (p(L)a\pi(j), 2^m u_L) 2^m u_L \quad .$$

Wir können nun noch zeigen, daß $\{2^m u_L | L \in F(j)\}$ auch Erzeugendensystem ist. Sei $a \in E(j) = PC(E)\pi(j)$.

$$\begin{aligned} a &= a\pi(j) = a p(j) \pi(j) = p(j) a \pi(j) = \sum_{L \in F(j)} p(L) a \pi(j) \\ &= \sum_{L \in F(j)} (p(L) a \pi(j), 2^m u_L) 2^m u_L = \sum_{L \in F(j)} (a, 2^m u_L) 2^m u_L \end{aligned}$$

Bem.: Aus Lemma 2 folgt : $\dim E(j) = |F(j)| = \binom{2m+1}{j}$

Korollar 1 Die Einschränkungen der Darstellungen $U_j, j=0, \dots, m$, auf $I(j)$ sind treue, surjektive Darstellungen der Algebren $I(j)$.

Bew.: Sei $a \in I(j)$ und $U_j(a) = 0$. Aufgrund von Satz 12 erhalten wir dann $ap(L) = 0$ für alle $L \in F(j)$ und somit auch $a = ap(j) = 0$. Aus der Definition von $I(j)$ und Lemma 2 entnimmt man $\dim I(j) = |F(j)| \dim E(j) = \dim L(E(j))$, was zusammen mit der Treue der Darstellungen auch deren Surjektivität impliziert. ■

Wir können jetzt alle κ -Darstellungen von $PC(E)$ vollständig beschreiben.

Theorem 2 Sei R eine κ -Darstellung von $PC(E)$ über H . Setzen wir $H(j) := R(p(j))H$, so sind die Räume $H(j)$ unter R invariant und spannen H auf.

$$H = \bigoplus_{j=0}^m H(j)$$

$H(j)$ ist orthogonale direkte Summe von invarianten, $\binom{2m+1}{j}$ -dimensionalen Unterräumen $H_\alpha(j), \alpha \in A_j$. Die Darstellung $R|_{H_\alpha(j)}$ ist unitär äquivalent zur Darstellung $U_j \cdot A_j$ ist die Hilbertraumdimension von $R(\pi(j))H$.

Bew.: Die Invarianz der Räume $H(j)$ folgt aus der Zentralität der Projektionen $p(j)$, die Zerlegung von H aus der Identität $1 = \sum_{j=0}^m p(j)$.

Sei nun $\{x_{j\alpha} \mid \alpha \in A_j\}$ eine Orthonormalbasis von $R(\pi(j))H$. Dem Beweis von Lemma 2 entnimmt man dann, daß $\{R(u_L)x_{j\alpha} \mid L \in F(j)\}$ ein Orthonormalsystem ist. Setzen wir $H_\alpha(j) := \{R(u_L)x_{j\alpha} \mid L \in F(j)\}$, so folgt ebenfalls aus Lemma 2, daß $H_\alpha(j)$ invarianter Unterraum ist. Die Orthogonalität der Räume $H_\alpha(j), \alpha \in A_j$, ist eine Konsequenz der Orthogonalität der Vektoren $x_{j\alpha}, \alpha \in A_j$. Wir geben nun den Hilbertraumisomorphismus von $E(j)$ auf $H_\alpha(j)$ an.

$$\begin{aligned} T_{j\alpha} : E(j) &\longrightarrow H_\alpha(j) \\ a &\longmapsto 2^{-m} R(a) x_{j\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|T_{j\alpha} a\|^2 &= \|2^{-m} R(a) x_{j\alpha}\|^2 = \|2^{-m} R\left(\sum_{L \in F(j)} (a, 2^m u_L) 2^m u_L\right) x_{j\alpha}\|^2 \\ &= \left\| \sum_{L \in F(j)} (a, 2^m u_L) R(u_L) x_{j\alpha} \right\|^2 = \sum_{L \in F(j)} |(a, 2^m u_L)|^2 \\ &= \|a\|_2^2 \end{aligned}$$

Sei $a \in PC(E)$ und $b \in E(j)$. Wir erhalten nun:

$$T_{j\alpha} U_j(a) b = T_{j\alpha} a b = 2^{-m} R(ab) x_{j\alpha} = 2^{-m} R(a) R(b) x_{j\alpha} = R(a) T_{j\alpha} b \quad \blacksquare$$

VII Irreduzible Darstellungen von $PC(E)$ für separables E

Wir wollen in diesem Kapitel unsere Kenntnisse über die irreduziblen Darstellungen von $PC(E)$ für endlichdimensionales E ausnutzen, um zu Darstellungen für unendlichdimensionales E zu gelangen. Wir gehen hierbei wie in Kapitel IV vor.

Wir betrachten die Darstellung U_1 genauer. Ist E n -dimensional, so ist $E(1)$ ein $n+1$ -dimensionaler Raum mit Orthogonalbasis

$$\{u_{\{1\}}, u_{\{2\}}, \dots, u_{\{n\}}, u_I\}$$

Man überzeugt sich nun leicht von der Richtigkeit der folgenden Identitäten.

$$\begin{aligned} U_1(e_j)u_I &= \sqrt{2}^{-1} u_{\{j\}} & j \in I = \{1, \dots, n\} \\ U_1(e_j)u_{\{k\}} &= \delta_{jk} \sqrt{2}^{-1} u_I & j, k \in I \end{aligned}$$

Diese Betrachtungen motivieren die folgenden Definitionen.

Def. 1 Sei E ein reeller Hilbertraum. $E_{\mathbb{C}}$ bezeichne dann die Komplexifizierung von E , wobei $x \in E$ mit $(x, 0) \in E_{\mathbb{C}}$ identifiziert wird.

$$F := \mathbb{C} \otimes E_{\mathbb{C}}$$

$$\begin{aligned} W : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto \sqrt{2}^{-1} (0, x) \end{aligned}$$

Wir definieren nun für alle $x \in E$:

$$\begin{aligned} h(x) : F &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto (u, 1)Wx + (u, Wx)1 \end{aligned}$$

Satz 1 Die Abbildungen $h(x)$, $x \in E$, sind selbstadjungiert und erfüllen die Paraciffordrelation, so daß sie eine $*$ -Darstellung h von $PC(E)$ über F induzieren.

Bew.: Die Selbstadjungiertheit ist trivial. Seien nun $u \in F$ und $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} h(x)h(y)h(x)u &= h(x)h(y)((u, 1)Wx + (u, Wx)1) \\ &= h(x)((u, 1)(Wx, Wy)1 + (u, Wx)Wy) \\ &= (u, 1)(Wx, Wy)Wx + (Wy, Wx)(u, Wx)1 \\ &= 2(x, y)((u, 1)Wx + (u, Wx)1) \\ &= 2(x, y)h(x)u \end{aligned}$$

Im folgenden sei nun E ein unendlichdimensionaler Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{e_1 | 1 \in \mathbb{N}\}$.

Def.: Wir definieren für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in E$:

$$\begin{aligned} h_n(x) : \hat{\Lambda}^n F &\longrightarrow \hat{\Lambda}^n F \\ u_1 \wedge \dots \wedge u_n &\longmapsto \sum_{j=1}^n u_1 \wedge \dots \wedge h(x)u_j \wedge \dots \wedge u_n \end{aligned}$$

und lineare und stetige Fortsetzung

Bem.: Mit den Bezeichnungen aus Kapitel II gilt:

$$h_n(x) = d\Gamma_n(h(x))|_{\hat{\Lambda}^{nF}}$$

Hieraus folgt sofort die Stetigkeit und Selbstadjungiertheit der Operatoren $h_n(x)$.

Satz 2 Die Operatoren $h_n(x)$, $x \in E$, erfüllen für alle $n \in \mathbb{N}$ die Paracliffordrelation und induzieren so *-Darstellungen h_n von $PC(E)$.

Bew.: Wir geben uns eine spezielle Orthogonalbasis von F vor. Dies erleichtert den Nachweis der Paracliffordrelation. Seien $x, y \in E$.

$$\{z_j | 1 \leq j \leq n, z_1 = 1, z_2 = \overline{w}x, (z_j, \overline{w}y) = 0 \text{ für } j \geq 4\}$$

$$\begin{aligned} h_n(x)h_n(y)h_n(x)z_{i_1} \dots z_{i_n} &= h_n(x)h_n(y)((z_{i_1}, 1)\overline{w}x \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_n} + (z_{i_1}, \overline{w}x)1 \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_n}) \\ &= h_n(x)((z_{i_1}, 1)(\overline{w}x, \overline{w}y)1 \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_n} + \\ &\quad (z_{i_1}, 1)(z_{i_2}, \overline{w}y)\overline{w}x \wedge 1 \wedge z_{i_3} \wedge \dots \wedge z_{i_n} + \\ &\quad (z_{i_1}, \overline{w}x)\overline{w}y \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_n}) \\ &= 2(x, y)(z_{i_1}, 1)\overline{w}x \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_n} + \\ &\quad 2(x, y)(z_{i_1}, \overline{w}x)1 \wedge z_{i_2} \wedge \dots \wedge z_{i_n} \\ &= 2(x, y)h_n(x)z_{i_1} \wedge \dots \wedge z_{i_n} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Wir wollen nun nachweisen, daß die Darstellungen h_n , $n \in \mathbb{N}$, irreduzibel und paarweise inäquivalent sind. Wir werden diese Aussagen mit Hilfe geeigneter Projektionen nachweisen.

Def.: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren dann: $p_n(1) := \frac{1}{2}h_n(e_1)^2$.

Lemma 1 a) $p_n(1) \dots p_n(n)(I - p_n(n+1)) \dots (I - p_n(2n)) = P_{\langle e_1 \wedge \dots \wedge e_n \rangle}$

b) $p_m(1) \dots p_m(n)(I - p_m(n+1)) \dots (I - p_m(2n)) = 0$ für $m < n$

Bew.: Setzen wir noch $e_0 := 1$, so ist $\{e_j | 1 \leq j \leq n\}$ eine Orthonormalbasis von F . Der Operator $h(e_j)$, $j \in \mathbb{N}$, hat dann folgende Gestalt:

$$h(e_j) = \sqrt{2} \left((e_0, e_j)e_j + (e_j, e_0)e_0 \right)$$

Man verifiziert nun leicht die folgenden Gleichungen.

$$h_n(e_j)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = \begin{cases} \sqrt{2} e_j \wedge \dots \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} & i_1 = 0, j \neq 1 \\ \sqrt{2} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} & i_1 \neq 0, i_1 = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$p_n(j)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = \begin{cases} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} & \text{entweder } 0 \in I \text{ oder } j \in I \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$(1-p_n(j))e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = \begin{cases} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} & \text{entweder } \{0, j\} \subseteq I \text{ oder } \{0, j\} \subseteq \bar{I} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die letzten beiden Relationen implizieren unmittelbar die beiden Behauptungen. ■

Satz 3 Die Darstellungen $h_n, n \in \mathbb{N}$, sind paarweise inäquivalent und irreduzibel.

Bew.: Die Inäquivalenz der Darstellungen folgt sofort aus Lemma 1. Wir wollen die Irreduzibilität mit dem Lemma von Haag/Schroer beweisen. Wegen Lemma 1a) müssen wir nur noch zeigen, daß $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ ein zyklischer Vektor der Darstellung h_n ist. Wir weisen die Zyklizität nach, indem wir zu jedem Basisvektor $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ von $\hat{\Lambda}_F^n$ ein $u \in PC(E)$ mit $h_n(u)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ bestimmen. Sei $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ mit $I := \{i_1, \dots, i_n\}$ vorgegeben. Wir ersetzen nun einen Index aus $\{1, \dots, n\}$ durch einen Index aus I .

$$j \in \{1, \dots, n\} \setminus I \implies h_n(j)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{0} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

$$i \in I \setminus \{0, 1, \dots, n\} \implies h_n(i)h_j(j)e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

Wir haben also e_j durch e_1 ersetzt. Wiederholt man diesen Schritt gegebenenfalls, so erhält man das oben beschriebene u. ■

Wir geben nun noch die der Fockdarstellung entsprechende Darstellung von $PC(E)$ an.

Def.: Sei E ein komplexer Hilbertraum.

$$h : E \longrightarrow L(\hat{F}o(E))$$

$$x \longmapsto C_x + C_x^*$$

Satz 4 Die Operatoren $h(x), x \in E$, erfüllen die Paracliffordrelation.

Die induzierte Darstellung h ist irreduzibel und zu den Darstellungen $h_n, n \in \mathbb{N}$, inäquivalent.

Bew.: Bezeichnet φ' den $\ast$ -Isomorphismus von $PC(E_{\mathbb{R}})$ auf $PF(E)$ (vgl. V, Theorem 1), so gilt $h = C \circ \varphi'$. Hieraus folgt sofort, daß h eine irreduzible Darstellung von $PC(E_{\mathbb{R}})$ ist.

$$P(1) := \frac{1}{2}h(e_1) = \frac{1}{2}(C_{e_1}^2 + C_{e_1}C_{e_1}^* + C_{e_1}^*C_{e_1} + C_{e_1}^{*2})$$

Wir erhalten somit:

$$P(1)\Omega = \frac{1}{2}(e_1^2 + \Omega) \quad , \quad (I - P(1))\Omega = \frac{1}{2}(\Omega - e_1^2)$$

$$\text{und} \quad P(1) \dots P(n)(I - P(n+1)) \dots (I - P(2n)) \neq 0 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die letzte Relation liefert zusammen mit Lemma 1b) die Inäquivalenz der Darstellungen. ■

VIII Weitere Darstellungen von $PC(E)$

Wir werden in diesem Kapitel zeigen, wie man von einer Klasse von Darstellungen der Cliffordalgebra (vgl. [Shale/Stinespring] Theorem 1) zu entsprechenden Darstellungen der Paracliffordalgebra gelangt. Auf diese Weise erhalten wir dann schließlich eine zur Fockdarstellung äquivalente Darstellung von $PF(E)$.

Satz 1 Jede $\ast$ -Darstellung f der Cliffordalgebra $C(E)$ über H induziert eine Darstellung F von $PC(E)$ über $H \otimes H$.

Bew.: Ist f eine $\ast$ -Darstellung von $C(E)$, so gilt für alle $x \in E$:

$$f(x)^{\ast} = f(x) \quad \text{und} \quad \|f(x)\|^2 = \|x\|^2 I$$

Wir definieren nun für alle $x \in E$:

$$F(x) := 2^{-\frac{1}{2}}(f(x) \otimes I + I \otimes f(x))$$

Man sieht sofort, daß $F(x)$ selbstadjungiert ist. Wir zeigen jetzt, daß die Operatoren $F(x)$, $x \in E$, die Paracliffordrelation erfüllen. Seien $x, y \in E$.

$$\begin{aligned} F(x)F(y)F(x) &= 2^{-\frac{3}{2}}(f(x) \otimes I + I \otimes f(x))(f(y) \otimes I + I \otimes f(y))(f(x) \otimes I + I \otimes f(x)) \\ &= 2^{-\frac{3}{2}}(f(x)f(y)f(x) \otimes I + f(x)f(y) \otimes f(x) + f(x)^2 \otimes f(y) + \\ &\quad f(x) \otimes f(y)f(x) + f(y)f(x) \otimes f(x) + f(y) \otimes f(x)^2 + \\ &\quad f(x) \otimes f(x)f(y) + I \otimes f(x)f(y)f(x)) \\ &= 2^{-\frac{3}{2}}(f(x)f(y)f(x) \otimes I + I \otimes f(x)f(y)f(x) + \\ &\quad (f(x)f(y) + f(y)f(x)) \otimes f(x) + \|x\|^2(I \otimes f(y) + f(y) \otimes I) + \\ &\quad f(x) \otimes (f(x)f(y) + f(y)f(x))) \\ &\stackrel{(\ast)}{=} 2^{-\frac{3}{2}}(2(x, y)(f(x) \otimes I + I \otimes f(x)) - \|x\|^2(f(y) \otimes I + I \otimes f(y)) + \\ &\quad 2(x, y)(f(x) \otimes I + I \otimes f(x)) + \|x\|^2(f(y) \otimes I + I \otimes f(y))) \\ &= 2^{\frac{1}{2}}(x, y)(f(x) \otimes I + I \otimes f(x)) = 2(x, y)F(x) \end{aligned}$$

$$(\ast) \quad f(x)f(y) + f(y)f(x) = 2(x, y)I$$

$$f(x)f(y)f(x) = 2(x, y)f(x) - \|x\|^2 f(y) \quad \blacksquare$$

Satz 2 Die in Satz 1 beschriebene Darstellung F ist reduzibel für $\dim H > 1$.

Bew.: Wir zeigen, daß die Kommutante von $F(PC(E))$ eine nichttriviale Involution enthält.

$$R : H \otimes H \longrightarrow H \otimes H \quad \text{und lineare und stetige Fortsetzung} \\ x \otimes y \longmapsto y \otimes x$$

Für alle $x \in E$ und $u, v \in H$ gilt:

$$\begin{aligned} F(x)R(uev) &= F(x)v \otimes u = 2^{-\frac{1}{2}}(v \otimes f(x)u + f(x)v \otimes u) = R(2^{-\frac{1}{2}}(f(x)uev + u \otimes f(x)v)) \\ &= RF(x)uev \end{aligned}$$

R liegt also in der Kommutante von $F(PC(E))$. Aufgrund der Voraussetzung $\dim H > 1$ gilt aber $R \neq \lambda I$. ■

Bei den oben zitierten Darstellungen der Cliffordalgebra handelt es sich um Darstellungen über $C_2(E)$. Satz 2 zeigt nun, daß $C_2(E) \hat{C}_2(E)$ als Grundraum für die Darstellung von $PC(E)$ "zu groß" ist. Wir wollen die Darstellungen von $PC(E)$ stattdessen über $PC_2(E)$ realisieren. Wir erreichen dies, indem wir eine Isometrie T von $PC_2(E)$ in $C_2(E) \hat{C}_2(E)$ definieren und dann zeigen, daß für alle $x \in PC_2(E)$ $F(x)T(PC_2(E)) \subseteq T(PC_2(E))$ gilt.

Def.: 1 bezeichne die Darstellung von $C(E)$ über $C_2(E)$ via Linksmultiplikation. $\hat{T}$ bezeichne dann die von 1 nach Satz 1 induzierte Darstellung von $PC(E)$.

$$\begin{aligned} T : PC(E) &\longrightarrow C_2(E) \hat{C}_2(E) \\ a &\longmapsto \hat{T}(a)1 \otimes 1 \end{aligned}$$

Lemma 1 T ist eine Isometrie.

Bew.: Wir zeigen, daß die Orthonormalbasis $B(E)$ von $PC(E)$ durch T in ein Orthonormalsystem abgebildet wird.

$$Te_1 = \hat{T}(e_1)1 \otimes 1 = 2^{-\frac{1}{2}}(e_1 \otimes 1 + 1 \otimes e_1)$$

$$T(e_j^2 - 1) = \hat{T}(e_j^2 - 1)1 \otimes 1 = 1(e_j) \otimes 1(e_j)1 \otimes 1 = e_j \otimes e_j$$

$$\text{Es folgt } Te_{(J_u, J_g, K)} = 2^{-\frac{|J|}{2}} \prod_{I \subseteq J} \prod_I e_1 \prod_K e_k \otimes \prod_{J \setminus I} e_1 \prod_K e_k \quad \text{mit } J := J_u \cup J_g.$$

Hieran erkennt man sofort, daß

$$(Te_{(J_u^1, J_g^1, K^1)}, Te_{(J_u^2, J_g^2, K^2)}) = 0$$

ist, falls $J^1 \neq J^2$ oder $K^1 \neq K^2$ gilt. Wir können dann o.E. $K^1 = K^2 = \emptyset$ und $J^1 = J^2$, aber $J_u^1 + J_g^2$ und $J_g^1 + J_u^2$, annehmen.

$$e_{i_1} \cdots e_{i_n} := e_{(J_u^1, J_g^1, \emptyset)} \quad e_{j_1} \cdots e_{j_n} := e_{(J_u^1, J_g^1, \emptyset)}$$

$$\text{Sei } i = i_{2k-1} = j_{2l} \in J_u^1 \cap J_g^2.$$

$$\begin{aligned} (Te_{(J_u^1, J_g^1, \emptyset)}, Te_{(J_u^2, J_g^2, \emptyset)}) &= (\hat{T}(e_{i_1}) \cdots \hat{T}(e_{i_n})1 \otimes 1, \hat{T}(e_{j_1}) \cdots \hat{T}(e_{j_n})1 \otimes 1) \\ &= (-1)^{k-1+1-l} (\hat{T}(e_{i_{2k-1}}) \cdots \hat{T}(e_{i_n})1 \otimes 1, \hat{T}(e_{j_1}) \hat{T}(e_{j_{2l}}) \cdots \hat{T}(e_{j_n})1 \otimes 1) \\ &= (-1)^{k+l} (\hat{T}(e_{i_1}) \hat{T}(e_{j_1}) \hat{T}(e_{i_1}) \cdots \hat{T}(e_{i_n})1 \otimes 1, \hat{T}(e_{j_3}) \cdots \hat{T}(e_{j_n})1 \otimes 1) \\ (\times) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$(\times) \quad \hat{T}(e_{i_1}) \hat{T}(e_{j_1}) \hat{T}(e_{i_1}) = 2(e_{i_1}, e_{j_1}) \hat{T}(e_{i_1}) = 0, \text{ da } (e_{i_1}, e_{j_1}) = 0$$

$$\|Te_{(J_u, J_g, K)}\|^2 = 2^{-|J|} \sum_{I \subseteq J} \left\| \prod_I e_1 \prod_K e_k \otimes \prod_{J \setminus I} e_1 \prod_K e_k \right\|^2$$

$$= 2^{-|I|} 2^{|J|} = 1$$

Bem.: Wir können T zu einer ebenfalls mit T bezeichneten Isometrie von $PC_2(E)$ nach $C_2(E) \hat{=} C_2(E)$ ausdehnen.

Def.: $T^{-1} : T(PC_2(E)) \longrightarrow PC_2(E)$

$$Tu \longmapsto u$$

Zur Berechnung von $T^{-1}F(x)T$ benötigen wir noch eine geeignete Zerlegung der Elemente von $PC(E)$.

Lemma 2 Sei $x \in E$ und $x \neq 0$. M bezeichne das orthogonale Komplement von $\langle x \rangle$. Jedes $u \in PC(E)$ besitzt eine Orthogonalzerlegung

$$u = u_1 + xu_2 + \sum y_1 x u_{31} + (x^2 - \|x\|^2)u_4$$

mit $u_1, u_2, u_{31}, u_4 \in PC(M)$ und $y \in M, \|y\| = 1$.

u_1, u_2 und u_4 sind eindeutig bestimmt.

Bew.: Die angegebene Zerlegung ergibt sich unmittelbar aus der Parac Cliffordrelation. Die explizite Angabe ist etwas mühselig.

Sei $u = \sum_{i=1}^r a_i x_{i1} \dots x_{in_i} \in PC(E)$.

$\{e_i \mid i=1, \dots, s; e_i = \frac{x}{\|x\|}\}$ sei dann eine Orthonormalbasis von $LH(\{x_{ij} \mid i=1, \dots, r; j=1, \dots, n_i\} \cup \{x\}) = F$. Bezüglich der Orthonormalbasis $B(F)$ von $PC(F)$ besitzt u dann die Darstellung

$$u = \sum_{i=1}^n b_i e_i(J_u^1, J_g^1, K^1)$$

Wir zerlegen nun $I := \{1, \dots, n\}$ in vier disjunkte Teilmengen. Diese Zerlegung erlaubt uns dann die explizite Angabe der u_j .

$$I_1 := \{i \in I \mid 1 \notin J_u^1 \cup J_g^1 \cup K^1\} \quad I_2 := \{i \in I \mid 1 \in J_u^1\}$$

$$I_3 := \{i \in I \mid 1 \in J_g^1\} \quad I_4 := \{i \in I \mid 1 \in K^1\}$$

$$u_1 := \sum_{i \in I_1} b_i e_i(J_u^1, J_g^1, K^1) \quad u_2 := \|x\|^{-1} \sum_{i \in I_2} b_i e_i(J_g^1, J_u^1 \setminus \{1\}, K^1)$$

$$u_{31} := \|x\|^{-1} b_i e_i(J_u^1 \setminus \{1\}, J_g^1 \setminus \{1\}, K^1) \quad y_1 := e_{i1}$$

$$u_4 := \|x\|^{-2} (-1)^{|J|} \sum_{i \in I_4} b_i e_i(J_u^1, J_g^1, K^1 \setminus \{1\})$$

Die Orthogonalität der Summanden $u_1, u_2, \sum y_1 x u_{31}$ und u_4 folgt aus der Definition der u_j und der Orthogonalität der $e_i(J_u^1, J_g^1, K^1)$.

Wir müssen jetzt nur noch die Eindeutigkeit von u_1, u_2 und u_4 zeigen. Da es sich um eine Orthogonalzerlegung handelt, wissen wir bereits, daß u_1, xu_2 und $(x^2 - \|x\|^2)u_4$ eindeutig bestimmt sind.

Sei jetzt $v \in PC(M)$.

$$\begin{aligned}\|xv\|_2^2 &= (xv, xv) = (x^2v, v) = ((x^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2)v, v) \\ &= (\|x\|_2^2 v, v) = \|x\|_2^2 \|v\|_2^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|(x^2 - \|x\|^2)v\|_2^2 &= ((x^2 - \|x\|^2)v, (x^2 - \|x\|^2)v) = ((x^2 - \|x\|^2)^2 v, v) \\ &= (\|x\|_2^4 v, v) = \|x\|_2^4 \|v\|_2^2\end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen zeigen dann noch die Eindeutigkeit von u_2 und u_4 . Die u_{31} sind nicht eindeutig bestimmt, wie man am folgenden Beispiel sieht.

$$y_1 x u_{31} = y_1 x (y_1 + u_{31}) \quad \blacksquare$$

Wir geben jetzt die von Shale/Stinespring gefundenen Darstellungen der Cliffordalgebra an.

([Shale/Stinespring] Theorem 1)

Sei E ein komplexer Hilbertraum. Für $u \in C(E)$ bezeichne l_u den stetigen Operator der Linksmultiplikation auf $C_2(E)$ und r_u den stetigen Operator der Rechtsmultiplikation. Sei β der beschränkte Operator auf $C_2(E)$, der den Automorphismus von $C(E)$ fortsetzt, welcher $E \ni x$ auf $-x$ abbildet. Sind A und B reell lineare Operatoren auf E , die der Identität $A^*A + B^*B = I$ genügen, dann induziert die Quantisierungsabbildung

$$f : x \longmapsto l_{Ax} + i r_{\wedge Bx} \beta$$

eine $\times$ -Darstellung von $C(E)$, wobei $\wedge$ die Multiplikation mit i in $E_{\mathbb{R}}$ bedeutet.

Lemma 3 Sei $x \in E$. Dann gilt: $T^{-1}h(x)T = L_x$.

Bew.: Wir zeigen $h(x)Tu = TL_x u$ für alle $u \in PC(E)$.

$$h(x)Tu = h(x)h(u)1e1 = h(xu)1e1 = T(xu) = TL_x u \quad \blacksquare$$

Def.: Sei $x \in E$. Wir definieren dann: $R(x) := 2^{-\frac{1}{2}}(r_x \beta e I + I e r_x \beta)$

Zur Berechnung von $T^{-1}R(x)T$ führen wir die folgenden Operatoren ein.

Def.: Sei $x \in E$ und $x \neq 0$.

$$\begin{aligned}D_x : PC(E) &\longrightarrow PC(E) \\ u &\longmapsto xu_1 + (x^2 - \|x\|^2)u_2\end{aligned}$$

Lemma 4 $D(x)$ ist ein stetiger linearer Operator der Norm $\|x\|$.

Für den adjungierten Operator gilt:

$$D(x)^* u = \|x\|_2^2 u_2 + \|x\|_2^2 x u_4$$

$$\begin{aligned}\text{Bew.: } \|D(x)u\|^2 &= \|xu_1\|^2 + \|(x^2 - \|x\|^2)u_2\|^2 = \|x\|^2 \|u_1\|^2 + \|x\|^4 \|u_2\|^2 \\ &= \|x\|^2 (\|u_1\|^2 + \|xu_2\|^2) \leq \|x\|^2 \|u\|^2\end{aligned}$$

Folglich ist $\|D(x)\| \leq \|x\|$.

Diese Ungleichung ergibt zusammen mit $\|D(x)1\| = \|x\|$ den ersten Teil der Behauptung.

$$\begin{aligned}
 (D(x)v, u) &= (xv_1 + (x^2 - \|x\|^2)v_2, u) \\
 &= (xv_1, xu_1) + ((x^2 - \|x\|^2)v_2, (x^2 - \|x\|^2)u_2) \\
 &= \|x\|^2(v_1, u_1) + \|x\|^4(v_2, u_2) \\
 &= \|x\|^2(v_1, u_1) + \|x\|^2(xv_2, xu_2) \\
 &= (v, \|x\|^2u_1 + \|x\|^2xu_2).
 \end{aligned}$$

Bem.: Die Ausdehnung von $D(x)$ auf $PC_2(E)$ bezeichnen wir wieder mit $D(x)$.

Es gilt: $L_x = D(x) + D(x)^*$.

$$\begin{aligned}
 \text{Bew.: } L_x u &= xu_1 + x^2u_2 + \|x\|^2xu_4 \\
 &= xu_1 + (x^2 - \|x\|^2)u_2 + \|x\|^2u_2 + \|x\|^2xu_4 \\
 &= D(x)u + D(x)^*u
 \end{aligned}$$

Lemma 5 Sei $x \in E$ und $x \neq 0$. Dann gilt: $T^{-1}R(x)T = D(x) - D(x)^*$

Bew.: Wir zeigen, daß für alle $u \in PC(E)$ gilt:

$$R(x)Tu = T(D(x) - D(x)^*)u.$$

$$D(x)u_1 = xu_1 \quad D(x)^*u_1 = 0$$

Wir nehmen nun o.E. $u_1 = x_1 \dots x_n$ an. Sei $J := \{1, \dots, n\}$.

$$\begin{aligned}
 R(x)Tu_1 &= R(x)(2^{\frac{n}{2}} \sum_{I \in J} \prod_I x_1 \otimes \prod_{J \setminus I} x_1) \\
 &= 2^{\frac{n-1}{2}} \sum_{I \in J} ((-1)^{|I|} \prod_I x_1 \otimes \prod_{J \setminus I} x_1 + (-1)^{|J \setminus I|} \prod_I x_1 \otimes \prod_{J \setminus I} x_1) \\
 &= 2^{\frac{n-1}{2}} \sum_{I \in J} (x \prod_I x_1 \otimes \prod_{J \setminus I} x_1 + \prod_I x_1 \otimes x \prod_{J \setminus I} x_1) \\
 &= T(xu_1) = T(D(x) - D(x)^*)u_1
 \end{aligned}$$

Genauso zeigt man jetzt noch:

$$R(x)T(xu_2) = T((x^2 - 2\|x\|^2)u_2) = T(D(x) - D(x)^*)xu_2$$

$$R(x)T(y_1 xu_{31}) = 0 = T(D(x) - D(x)^*)y_1 xu_{31}$$

$$R(x)T((x^2 - \|x\|^2)u_4) = -T(\|x\|^2xu_4) = T(D(x) - D(x)^*)(x^2 - \|x\|^2)u_4$$

Wir können jetzt die Darstellungen von $PC(E)$ über $PC_2(E)$ explizit angeben.

Theorem 1 Sei E ein komplexer Hilbertraum. A und B seien reell lineare Operatoren, die der Identität $A^*A + B^*B = I$ genügen. Dann induziert die Quantisierungsabbildung

$$H : E \longrightarrow L(PC_2(E))$$

$$x \longmapsto L_{Ax} + i(D(\wedge Bx) - D(\wedge Bx)^*)$$

eine $\times$ -Darstellung von $PC(E)$.

Bew.: Die Behauptung folgt aus [Shale/Stinespring] Theorem 1, Satz 1, Lemma 3 und Lemma 5, wenn man die folgende Identität beachtet.

$$H(x) = T^{-1} F(x) T$$

Diese Darstellungen erlauben die Konstruktion von Zuständen auf $PC(E)$, die unter Automorphismen, die von unitären Abbildungen in E induziert sind, invariant bleiben.

Der Arbeit von Shale/Stinespring entnimmt man die folgende Konstruktion von Operatoren A und B . Für jeden selbstadjungierten Operator über dem komplexen Raum E mit $-I \leq R \leq I$ erfüllen

$$A := \frac{1}{2}((I+R)^{\frac{1}{2}} + (I-R)^{\frac{1}{2}})$$

$$\text{und } B := \frac{1}{2}((I+R)^{\frac{1}{2}} - (I-R)^{\frac{1}{2}})$$

die Identität $A^*A + B^*B = I$. Wir setzen dann $H_R(x) := L_{Ax} + i(D(\wedge Bx) - D(\wedge Bx)^*)$, falls A und B wie oben angegeben von R abhängen. Der zu der Darstellung H gehörende Zustand wird mit G_R bezeichnet, d.h. für alle $u \in PC(E)$ gilt

$$G_R(u) := (H_R(u)1, 1) \quad .$$

Satz 3 Ist α ein Automorphismus von $PC(E)$, der einen unitären Operator auf E fortsetzt, so gilt:

$$G_{\alpha^{-1}R\alpha} = G_R \circ \alpha$$

Bew.: Wir zeigen zuerst, daß für alle $u \in PC(E)$ gilt:

$$(*) \quad \alpha H_{\alpha^{-1}R\alpha}(u) \alpha^{-1} = H_R(\alpha u)$$

$$A_1 := \frac{1}{2}((I+R)^{\frac{1}{2}} + (I-R)^{\frac{1}{2}}) \quad B_1 := \frac{1}{2}((I+R)^{\frac{1}{2}} - (I-R)^{\frac{1}{2}})$$

Aus der Identität $(I + \alpha^{-1}R\alpha)^{\frac{1}{2}} = \alpha^{-1}(I+R)^{\frac{1}{2}}\alpha$ folgen sofort die Gleichungen:

$$A_2 := \frac{1}{2}((I + \alpha^{-1}R\alpha)^{\frac{1}{2}} + (I - \alpha^{-1}R\alpha)^{\frac{1}{2}}) = \alpha^{-1}A_1\alpha$$

$$B_2 := \frac{1}{2}((I + \alpha^{-1}R\alpha)^{\frac{1}{2}} - (I - \alpha^{-1}R\alpha)^{\frac{1}{2}}) = \alpha^{-1}B_1\alpha$$

Sei $v \in PC_2(E)$. Wegen der Multiplikativität und Linearität von H und α können wir uns beim Nachweis der Gleichung $(*)$ auf $u \in E$ beschränken.

$$\alpha L_{A_2 u} \alpha^{-1} v = \alpha(A_2 u \cdot \alpha^{-1} v) = \alpha(A_2 u) \cdot v = A_1 \alpha u \cdot v = L_{A_1(\alpha u)} v \quad (+)$$

Da α die Fortsetzung eines unitären Operators ist, verifiziert man durch einfaches Nachrechnen die Richtigkeit der folgenden Relation.

$$\alpha D(z) \alpha^{-1} = D(\alpha z) \quad \text{für alle } z \in E$$

Berücksichtigt man noch, daß $\alpha|_E$ $\mathbb{C}$ -linear ist und folglich mit $\wedge$ vertauscht, so erhält man:

$$\alpha D(\wedge B_2 u) \alpha^{-1} = D(\alpha \wedge B_2 u) = D(\wedge \alpha B_2 u) = D(\wedge B_1 \alpha u) \quad (++)$$

$(+)$ und $(++)$ implizieren die Behauptung $(*)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Sei } u \in \text{PC}(E). \quad G_{\alpha^{-1}R\alpha}(u) &= (H_{\alpha^{-1}R\alpha}(u)1,1) = (\alpha^{-1}H_R(\alpha u)\alpha 1,1) \\
 &= (H_R(\alpha u)\alpha 1,\alpha 1) = (H_R(\alpha u)1,1) = G_R(\alpha u) \\
 &= G_R\alpha(u)
 \end{aligned}$$

Bem.: Ist R ein skalarer Operator, so ist G_R unter allen Automorphismen von $\text{PC}(E)$, die unitäre Operatoren auf E fortsetzen, invariant.

Zum Abschluß betrachten wir die Darstellung H_I etwas genauer. Wir zeigen, daß H_I einen minimalen invarianten Unterraum besitzt. Die Einschränkung von H_I auf diesen Unterraum liefert dann eine zur Fockdarstellung äquivalente Darstellung der Parafermialgebra. Diese Ergebnisse sind eine Übertragung der entsprechenden Aussagen über die Cliffordalgebra ([Shale/Stinespring] Th. 2) auf die Paracliffordalgebra.

Def.: Sei E ein separabler komplexer Hilbertraum. M bezeichne einen nicht notwendig abgeschlossenen Unterraum von E . $h(M)$ ist dann die Unter- algebra von $\text{PC}(E)$, die von 1 und den Elementen $x + i\Lambda x$, $x \in M$, erzeugt wird. $h_2(M)$ bezeichnet die Vervollständigung von $h(M)$ in der " $\|_2$ - Norm.

Lemma 6 Seien $x_1, x_2, x_3 \in E$. Wir setzen dann $z_j := 2^{-\frac{1}{2}}(x_j + i\Lambda x_j)$ für $j=1,2,3$.
Dann gilt: $[z_1, z_2, z_3]_+ = 0$

Bew.: Dies ist im wesentlichen die Aussage $[\psi(x), \psi(y), \psi(z)]_+ = 0$ aus V Theorem 1. Die Änderung des Koeffizienten und des Vorzeichens von $i\Lambda x$ sind unwesentlich.

Jedes $u \in h(E)$ besitzt eine Orthogonalzerlegung bezüglich eines vorgegebenen $z = 2^{-\frac{1}{2}}(x + i\Lambda x)$, $x \in E$. Das folgende Lemma 7 entspricht vollkommen Lemma 2.

Lemma 7 Sei E ein komplexer Hilbertraum. Sei $x \in E$ und $\|x\|=1$. M bezeichne das orthogonale Komplement von $\langle x \rangle$ in E . Jedes $u \in h(E)$ besitzt eine Orthogonalzerlegung

$$u = u_1 + zu_2 + \sum w_1 zu_{31} + z^2 u_4$$

mit $u_1, u_2, u_{31}, u_4 \in h(M)$ und $w \in (I + i\Lambda)M$. u_1, u_2 und u_4 sind eindeutig bestimmt.

Bew. Die Existenz der Zerlegung folgt aus der Vertauschungsrelation in Lemma 6. Die Orthogonalität der Summanden folgert man aus den Orthogonalitätsrelationen in Lemma 2. Wir zeigen hier exemplarisch die Orthogonalität von zu_2 und $z^2 u_4$.

$$(zu_2, z^2 u_4) = (u_2, z^* z^2 u_4)$$

Wir berechnen jetzt erst $z^* z^2$.

$$\begin{aligned}
z^* z^2 &= 2^{-\frac{1}{2}}(x - i\wedge x)(x + i\wedge x)(x + i\wedge x) \\
&= 2^{-\frac{1}{2}}(2x + ix^2\wedge x - x\wedge x^2 - i\wedge xx^2 + \wedge x^2 x + 2i\wedge x) \\
&= 2^{-\frac{1}{2}}(x + ix^2\wedge x - i\wedge x - x\wedge x^2 + x + i\wedge x) \\
& \quad (+) \\
&= 2^{-\frac{1}{2}}(2x + ix^2\wedge x - x\wedge x^2) \\
& \quad (+) \quad x^2\wedge x - \wedge xx^2 = x^2\wedge x - 2\wedge x + x^2\wedge x = 2(x^2\wedge x - \wedge x) \\
& \quad x\wedge x^2 - \wedge x^2 x = 2(x\wedge x^2 - x)
\end{aligned}$$

N_1 bezeichne nun das orthogonale Komplement von $\langle x \rangle$ in $E_{\mathbb{R}}$ und N_2 das orthogonale Komplement von $\langle \wedge x \rangle$ in $E_{\mathbb{R}}$. Mit Hilfe von Lemma 2 erhalten wir:

$$\begin{aligned}
(u_2, xu_4) &= 0 & u_2, u_4 &\in PC(N_1) \\
(u_2, x^2\wedge xu_4) &= (x^2u_2, \wedge xu_4) = 0 & x^2u_2, u_4 &\in PC(N_2) \\
(u_2, x\wedge x^2u_4) &= 0 & u_2, \wedge x^2u_4 &\in PC(N_1)
\end{aligned}$$

Diese drei Relationen zeigen $(zu_2, z^2u_4) = 0$. Die Eindeutigkeit von u_2 und u_4 weisen wir genauso wie in Lemma 2 nach.

$$\begin{aligned}
\|zu_2\|_2^2 &= (zu_2, zu_2) = (z^*zu_2, u_2) = 2^{-1}((x^2 + ix\wedge x - i\wedge xx + \wedge x^2)u_2, u_2) \\
&= 2^{-1}(\|x\|_2^2 + \|\wedge x\|_2^2)(u_2, u_2) = \|u\|_2^2 & \|\wedge x\| = \|\wedge x\| = 1
\end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\|z^2u_4\|_2$ benötigen wir das Produkt z^*z^2 .

$$\begin{aligned}
z^*z^2 &= 2^{-1}(x - i\wedge x)(2x + ix^2\wedge x - x\wedge x^2) \\
&= 2^{-1}(2x^2 + 2ix\wedge x - x^2\wedge x^2 - 2i\wedge xx + \wedge xx^2\wedge x) \\
&= x^2 + ix\wedge x - x^2\wedge x^2 - i\wedge xx + \wedge x^2 \\
\|z^2u_4\|_2^2 &= (u_4, z^*z^2u_4) = (\|x\|^2 - \|x\|^2\|\wedge x\|^2 + \|x\|^2)(u_4, u_4) \\
&= \|u_4\|_2^2
\end{aligned}$$

Wir können jetzt die den $D(x)$ entsprechenden Operatoren definieren.

Def.: Sei $z \in (I + i\wedge)E$ und $\|z\|=1$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial z} : h(E) &\longrightarrow h(E) \\
u &\longmapsto u_2 + zu_4
\end{aligned}$$

Lemma 8 $\frac{\partial}{\partial z}$ ist ein stetiger Operator der Norm 1. Bezeichnet man seine Fortsetzung auf $h_2(E)$ ebenfalls mit $\frac{\partial}{\partial z}$, so gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^* = L_z|_{h_2(E)}$$

Bew.: Die Aussage $\|\frac{\partial}{\partial z}\|=1$ folgt sofort aus der Orthogonalzerlegung von $ueh(E)$ und der Gleichheit $\|z^2v\| = \|zv\| = \|\wedge v\|$ für alle $v \in h(\langle z \rangle)^\perp$.

Seien $u, v \in h(E)$. Aufgrund der Relation $z^3 = zwz = 0$ für $w \in (I + 1\Lambda)\langle x \rangle^\perp$ gilt dann: $L_z v = zv_1 + z^2 v_2$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z}, v \right) &= (u_2 + zu_4, v) = (u_2, v_1) + (zu_4, zv_2) \\ &= (u_2, zv_1) + (z^2 u_4, z^2 v_2) = (u, zv_1 + z^2 v_2) = (u, L_z v) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Theorem 2 $h_2(E)$ ist ein invarianter Unterraum der Darstellung H_I von $PC(E)$ über $PC_2(E)$. H_I operiert irreduzibel auf $h_2(E)$.

Bew.: Es genügt, das Bild von $h(E)$ unter $H_I(z)$ und $H_I(z^*)$, $z \in (I + 1\Lambda)E$, zu betrachten.

$$\begin{aligned} H_I(z) &= 2^{-\frac{1}{2}}(H_I(x) + 1H_I(\Lambda x)) \\ &= 2^{-1}(L_x + 1(D(\Lambda x) - D(\Lambda x)^*) + 1L_{\Lambda x} - (D(-x) - D(-x)^*)) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}}L_z + 2^{-1}(1(D(\Lambda x) - D(\Lambda x)^*) + D(x) - D(x)^*) \end{aligned}$$

Für jedes $u \in h(E)$ und jedes $v \in h(\langle x \rangle^\perp)$ gilt: $H_I(z)(uv) = (H_I(z)u)v$. Wir brauchen folglich nur die Wirkung von $H_I(z)$ auf $1, z, wz$ und z^2 betrachten.

$$H_I(z)1 = 2^{-\frac{1}{2}}z + 2^{-1}(1\Lambda x + x) = 2^{-\frac{1}{2}}z + 2^{-\frac{1}{2}}z = 2^{\frac{1}{2}}z = 2^{\frac{1}{2}}L_z 1$$

$$\begin{aligned} H_I(z)z &= 2^{-\frac{1}{2}}z^2 + 2^{-\frac{3}{2}}(1(D(\Lambda x) - D(\Lambda x)^*) + D(x) - D(x)^*)(x + 1\Lambda x) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}}z^2 + 2^{-\frac{3}{2}}(1\Lambda xx - (\Lambda x^2 - 1) + 1 + x^2 - 1 + 1x\Lambda x - 1) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}}z^2 + 2^{-\frac{3}{2}}(x^2 + 1x\Lambda x + 1\Lambda xx - \Lambda x^2) \\ &= 2^{-\frac{1}{2}}z^2 + 2^{-\frac{1}{2}}z^2 = 2^{\frac{1}{2}}z^2 = 2^{\frac{1}{2}}L_z z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_I(z)wz &= 2^{-2}(1(D(\Lambda x) - D(\Lambda x)^*) + D(x) - D(x)^*)(yx + 1y\Lambda x + 1\Lambda yx - \Lambda y\Lambda x) \\ &= 2^{-2}(1\Lambda xyx - \Lambda x\Lambda yx + 1xy\Lambda x - x\Lambda y\Lambda x) \\ &= 2^{-2}(-1xy\Lambda x + 1x\Lambda y\Lambda x + 1xy\Lambda x - x\Lambda y\Lambda x) \\ &= 0 = 2^{\frac{1}{2}}L_z wz \quad w = 2^{-\frac{1}{2}}(y + 1\Lambda y), y \in \langle x \rangle^\perp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_I(z)z^2 &= 2^{-2}(1(D(\Lambda x) - D(\Lambda x)^*) + D(x) - D(x)^*)(x^2 + 1x\Lambda x + 1\Lambda xx - \Lambda x^2) \\ &= 2^{-2}(1\Lambda xx^2 - (\Lambda x^2 - 1)x - 1\Lambda x + x + 1\Lambda x + x + i(x^2 - 1)\Lambda x - x\Lambda x^2 - x - 1\Lambda x) \\ &= 2^{-2}(1(\Lambda xx^2 + x^2\Lambda x) - (\Lambda x^2 x + x\Lambda x^2) + 2x - 21\Lambda x) \\ &= 0 = 2^{\frac{1}{2}}L_z z^2 \end{aligned}$$

$$\text{Wir erhalten somit: } H_I(z)|_{h_2(E)} = 2^{\frac{1}{2}}L_z|_{h_2(E)} \quad .$$

$$\text{Genauso rechnet man nach: } H_I(z^*)|_{h_2(E)} = 2^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x} \quad .$$

Diese beiden Relationen zeigen die Invarianz von $h_2(E)$ unter H .

Wir zeigen nun noch mit dem verallgemeinerten Lemma von Haag/Schroer, daß H_I irreduzibel über $h_2(E)$ operiert.

Sei $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ eine Orthonormalbasis von E . $M := \text{LH}\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist dann ein dichter Teilraum von E . Die Beziehung $\|L_z\|_{h_2(E)} = \|z\|$ impliziert dann, daß $h(M)$ in $h_2(E)$ dicht liegt. Für jedes $u \in h(M)$ gilt:

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \right)^2 L_{z_k}^2 \right) u = (u, 1) 1$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial z_k} \right)^2 L_{z_k}^2$ ist also die Projektion auf den zyklischen Vektor 1. Nach dem verallgemeinerten Lemma von Haag/Schroer (II Lemma 1) folgt die Irreduzibilität der Darstellung H_I über $h_2(E)$. ■

Bem.: Die irreduzible Darstellung H_I von $PC(E)$ über $h_2(E)$ ist nichts anderes als die Fockdarstellung von $PF(E)$. Der Hilbertraumisomorphismus von $\hat{F}_0(E)$ auf $h_2(E)$ wird dabei gegeben durch

$$\sqrt{c_n} x_1 \dots x_n \longmapsto z_1 \dots z_n$$

und lineare und stetige Fortsetzung. C_X ist dann unitär äquivalent zu L_X .

Der oben angegebene Hilbertraumisomorphismus zeigt auch die unitäre Äquivalenz der Darstellungen $H_I|_{h_2(E)}$ und h (VII Satz 4) von $PC(E)$.

$$B_j \delta(M, K, L, N) = \begin{cases} 0 & , \text{falls } j \in M \cup L \\ \lambda_j(M, K, L, N) \delta(K \setminus \{j\}, M, L \cup \{j\}, N) & , \text{falls } j \in K \\ \lambda_j(M, K, L, N) \delta(K, M \cup \{j\}, L, N \setminus \{j\}) & , \text{falls } j \in N \end{cases}$$

(λ_j wie oben für $(M_0, K_0, \emptyset, \emptyset) \in \mathcal{F}(j, k)$).

so erfüllen $B_1, \dots, B_n, B_1^*, \dots, B_n^*$ die Parafermirelationen 2.Ordnung.

Die durch $B_1, \dots, B_n$ erzeugte Unter- $*$ -Algebra (mit 1) $\mathcal{U}(j, k)$ von $L(\mathcal{F}(j, k))$ operiert irreduzibel auf $\mathcal{F}(j, k)$.

Def.: Ist ψ eine $*$ -Darstellung von $PF(E)$, über dem Hilbertraum H , so werden die Bilder von Elementen aus $PF(E)$ mit großen Buchstaben bezeichnet, also etwa $B_j := \psi(b_j)$ und $P(M, K, L, N) := \psi(p(M, K, L, N))$.

Theorem 3.2 $B_1, \dots, B_n$ seien stetige Operatoren auf dem Hilbertraum H , die die Parafermirelationen 2.Ordnung erfüllen. Ist $H(j, k)$ die (orthogonale direkte) Summe aller Unterräume $P(M, K, L, N)H$ mit $(M, K, L, N) \in \mathcal{F}(j, k)$ ($0 \leq j, 0 \leq k, j+k=n$), so sind die Räume $H(j, k)$ unter allen B_j, B_j^* ($j \in I$) invariant und es gilt

$$H = \bigoplus_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j, 0 \leq k}}^1 H(j, k)$$

$H(j, k)$ ist eine orthogonale direkte Summe von $d(j, k)$ -dimensionalen Unterräumen $H(j, k)_x$ ($x \in K$), die unter allen B_j, B_j^* ($j \in I$) invariant sind, so daß die von den Einschränkungen der B_j ($j \in I$) auf $H(j, k)_x$ erzeugte $*$ -Algebra mit zu $\mathcal{U}(j, k)_2$ spatial isomorph ist für alle $x \in K$. Die Mächtigkeit von K ist die Hilbertraumdimension von $P(\{1, \dots, j\}, \{j+1, \dots, n\}, \emptyset, \emptyset)H$.

Theorem 4.1 $e(j, k) = \sum_{X \in \mathcal{F}(j, k)} p(X)$ ist ein zentrales idempotentes Element $\neq 0$ von $PF(E)$ für $0 \leq j, 0 \leq k, j+k=n$.

$$1 = \sum_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j, 0 \leq k}} e(j, k) ; e(j_1, k_1) e(j_2, k_2) = 0, \text{ falls } (j_1, k_1) \neq (j_2, k_2).$$

$$PF(E) = \sum_{\substack{j+k=n \\ 0 \leq j, 0 \leq k}} PF(E) e(j, k) \text{ ist eine direkte Zerlegung von } PF(E)$$

in $n+1$ zweiseitige Ideale $\neq 0$.

Theorem 4.2 Für alle $(M, K, L, N) \in \mathcal{F}(j, k)$ ist $PF(E)p(M, K, L, N)$ ein $d(j, k)$ -dimensionales minimales Linksideal von $PF(E)$.

2) s.Theorem 3.1; $\alpha(j, k)$ sei hier gebildet zu $M_0 = \{1, \dots, j\}, K_0 = I \setminus M_0$.

$PF(E)$ ist die direkte Summe der minimalen Linksideale
 $PF(E)_p(M,K,L,N)$ mit $(M,K,L,N) \in \mathfrak{F}_n$.

Zusammenfassung

Wir fassen den separablen komplexen Hilbertraum E als Einteilchenzustandsraum auf und konstruieren dann den Fockraum $\hat{F}_0(E)$ als Zustandsraum des freien Parafermionfeldes 2.Ordnung. Wir realisieren die Fockdarstellung von $PF(E)$ durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren auf $\hat{F}_0(E)$. Die Fockdarstellung ist irreduzibel und gestattet die kanonische Durchführung der 2.Quantisierung. Sie ist durch diese Eigenschaften bis auf unitäre Äquivalenz eindeutig bestimmt (vgl. [Robbins]). Wir zeigen dann, wie Greens Ansatz die $n+1$ irreduziblen, paarweise inäquivalenten Darstellungen von $PF(E)$ für n -dimensionales E liefert. Die Kenntnis dieser Darstellungen erlaubt dann die Konstruktion von abzählbar vielen irreduziblen, paarweise inäquivalenten Darstellungen von $PF(E)$, falls E von abzählbar unendlicher Dimension ist. Der zweite Teil der Arbeit bietet mittels der Paracliffordalgebra¹⁾ einen neuen Zugang zum Studium der Parafermialgebra. Ist nämlich E ein komplexer Hilbertraum und $E_{\mathbb{R}}$ seine Reellifizierung, so sind $PF(E)$ und $PC(E_{\mathbb{R}})$ κ -isomorph. Der wesentliche Vorteil dieses Zugangs liegt in der "einfacheren" Struktur - $PC(E)$ wird ja nur durch eine Relation definiert - von $PC(E)$ begründet. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß man $PC(E)$ leicht zu einer (für unendlichdimensionales E allerdings unvollständigen) Hilbertalgebra machen kann. Mit Hilfe der Theorie der vollständigen Hilbertalgebren klären wir dann die Idealstruktur und damit das Darstellungsproblem von $PC(E)$ für endlichdimensionales E vollkommen. Aus den dabei gewonnenen Darstellungen bekommen wir nun wieder abzählbar viele irreduzible, paarweise inäquivalente Darstellungen von $PC(E)$, falls E abzählbar unendliche Dimension hat. Zum Schluß konstruieren wir noch ausgehend von Darstellungen der Cliffordalgebra (vgl. [Shale/Stinespring]) eine Klasse von Darstellungen von $PC(E)$ und erhalten dadurch eine zur Fockdarstellung äquivalente Darstellung von $PF(E)$.

1) Ist E ein reeller Hilbertraum, so ist die Paracliffordalgebra $PC_{\mathbb{R}}(E)$ über E der Quotient von $\otimes E$ nach dem von den Elementen $xeyx - 2(x,y)x$, $x,y \in E$, erzeugten zweiseitigen Relationenideal. $PC(E)$ bezeichnet dann die Komplexifizierung von $PC_{\mathbb{R}}(E)$.

Literaturverzeichnis

- Dieudonné,J. Grundzüge der modernen Analysis Bd.2
VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften , Berlin , 1975
- Green,H.S. A Generalized Method of Field Quantization
Physical Review 90,1953,S.270-273
- Greenberg,O.W.;Messiah,A.M.L. Selection Rules for Parafields and the
Absence of Para Particles in Nature
Physical Review 138 , 1965 , S. B1155-B1167
- Greub,W. Multilinear Algebra
Springer-Verlag , New York Heidelberg Berlin , 1978
- Gross,L. Existence and Uniqueness of Physical
Ground States
J.Fu.An. 10 , 1972 , S.52-109
- Guichardet,M.A. Produits tensoriels infinis et repré-
sentations des relations d'anticommutation
An.Scient.Éc.Norm.Sup. 83 , 1966 , S.1-51
- Haag,R;Schroer,B. Postulates of Quantum Field Theory
J.Math.Phys. 3 , 1962 , S.248-256
- Putnam,C.R. Commutation Properties of Hilbert Space
Operators and Related Topics
Spinger-Verlag , New York Berlin Heidelberg , 1967
- Reed,M.;Simon,B. Methods of Modern Mathematical Physics
I Functional Analysis
II Fourier Analysis,Selfadjointness
Academic Press , New York San Francisco London , 1972/75
- Robbins,S. A Uniform Approach to Field Quantization
J.Fu.An. 29 , 1978 , S.23-36
- Rudin,W. Functional Analysis
Tata Mc Graw Hill , New Delhi , 1978
- Scheiba,J. Die Parafermialgebra 2.Ordnung
unveröffentlicht , Mainz , ohne Jahr
- Shale,D,;Stinespring,W.F. States of the Clifford Algebra
Ann. of Math. 80 , 1964 , S.365-381

Weidmann, J.

Lineare Operatoren in Hilberträumen

B.G.Teubner , Stuttgart , 1976

Lebenslauf

Ich, Thomas Zimmerschied, wurde am 5. Mai 1953 als Sohn des Meteorologen Dr. Wilhelm Zimmerschied und seiner Ehefrau Gertrud, geb. Krebs, in Wiesbaden geboren. Von 1959 bis 1963 besuchte ich die Volksschule an der Riederbergstraße in Wiesbaden. Ostern 1963 wechselte ich auf das Leibnizgymnasium über, wo ich im Juni 1971 die Reifeprüfung ablegte. Mit dem Wintersemester 1971/72 begann ich mein Mathematikstudium an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz. Von Oktober 1972 bis Oktober 1973 mußte ich mein Studium wegen Ableistung des Grundwehrdienstes unterbrechen. Nachdem ich das Studium zum Wintersemester 1973/74 wiederaufgenommen hatte, legte ich im September 1974 die Diplomvorprüfung ab. Am 25. Februar 1977 heiratete ich Annegret Kiehlmann. Am 2. Juni 1977 wurde unser Sohn Jan geboren. Im Januar 1978 legte ich dann die Diplomhauptprüfung ab. Die Promotion erfolgte im Januar 1981.

